NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FRÉDÉRIC DELAFOND

G. MAHUET

Question 612

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 342-345

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__342_0>

QUESTION 612

(voir p. 125).

On donne sur le même plan deux circonférences O, O′ *et un point fixe* P; *on décrit des circonférences passant par* P *et tangentes à* O, *l'on prend les axes radicaux de ces circonférences et de* O′; *on demande l'enveloppe de ces droites. Déterminer directement le point de contact de chaque axe radical avec cette enveloppe.*

SOLUTION DE MM. FRÉDÉRIC DELAFOND ET G. MAHUET,
Elèves du lycée de Lyon.

Le lieu des centres des circonférences passant par P et tangentes à O est une hyperbole (*) dont les foyers sont les points P et O, et dont l'axe réel est égal au rayon $2a$ du cercle O. Soit pris pour origine des coordonnées le point M, milieu de OP. L'axe des x étant dirigé suivant MO, et l'axe des y lui étant perpendiculaire, l'hyperbole aura pour équation

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

si

$$\text{OP} = 2c, \quad \text{et} \quad b^2 = c^2 - a^2.$$

Soient α, 6, les coordonnées d'un point O″ de cette hyperbole, l'équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-6)^2 = \left(\frac{c}{a}\alpha + a\right)^2$$

(*) Ce serait une ellipse si le point P était dans l'intérieur du cercle O, et une droite si ce point était sur la circonférence.

représentera le cercle ayant O″ pour centre, tangent à O et passant par P.

L'équation du cercle O′ étant

$$x^2 + y^2 + px + qy + r = 0,$$

l'axe radical des circonférences O′, O″ aura pour équation

$$(1) \quad px + qy + r + 2\alpha x + 2\beta y + \left(\frac{c\alpha}{a} + a\right)^2 - \alpha^2 - \beta^2 = 0.$$

Je prends la dérivée de cette équation en considérant β comme une fonction de α déterminée par la relation

$$(2) \qquad a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = -a^2 b^2.$$

Il en résulte

$$x + \beta' y + \frac{c}{a}\left(\frac{c\alpha}{a} + a\right) - \alpha - \beta\beta' = 0$$

et

$$\beta' = \frac{b^2\alpha}{a^2\beta};$$

par suite

$$(3) \qquad y = -\frac{a^2\beta}{b^2\alpha}(x + c).$$

Cette dernière équation est celle d'une parallèle à la normale à l'hyperbole au point O″, menée par le point P. Donc, pour déterminer le point de contact de l'axe radical avec l'enveloppe, il suffira de mener par le point P une parallèle à la bissectrice de l'angle extérieur au triangle OPO″ et de prendre sa rencontre avec l'axe radical des circonférences O′, O″.

Pour avoir l'équation de l'enveloppe, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3). Les équations (2) et (3) donnent

$$\alpha = \pm \frac{a^2(x + c)}{\sqrt{a^2(x + c)^2 - b^2y^2}}, \qquad \beta = \mp \frac{b^2y}{\sqrt{a^2(x + c)^2 - b^2y^2}}.$$

Substituant dans l'équation (1), on trouve

$$(4) \qquad px + qy + r + c^2 \pm 2\sqrt{a^2(x+c)^2 - b^2y^2} = 0\ (*);$$

d'où

$$[a(x+c) + by][a(x+c) - by] = \frac{1}{4}(px + qy + r + c^2)^2,$$

équation qui représente une conique tangente aux deux droites

$$(5) \qquad a(x+c) + by = 0,$$

$$(6) \qquad a(x+c) - by = 0,$$

la corde des contacts ayant pour équation

$$(7) \qquad px + qy + r + c^2 = 0.$$

Les droites (5) et (6) passent par le point donné P et sont perpendiculaires aux asymptotes de l'hyperbole

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2.$$

La corde des contacts (7) est perpendiculaire à la droite qui joint l'origine au centre de la circonférence O'.

Note. — M. Kessler a résolu la même question au moyen d'un calcul peu différent de celui de MM. Delafond et Mahuet. Toutefois M. Kessler établit d'une manière générale l'équation du lieu du point O'', équation qui est

$$p^2 - r^2 - 2p\alpha + 2r\sqrt{\alpha^2 + 6^2} = 0,$$

en nommant p la distance OP, et r le rayon de la circonférence O, et qui représente une hyperbole ou une ellipse

(*) Si le point P était intérieur au cercle O, il faudrait remplacer dans l'équation (4) b^2 par $-b^2$, et si ce point était sur la circonference O, b serait nul. (*Note du Rédacteur.*)

ayant pour directrices les droites

$$\pm(p^2 - r^2 - 2p\alpha) = 0,$$

et pour foyers les points O et P, suivant que $p^2 - r^2$ est positif ou négatif. La même équation appartient à une droite lorsqu'on a

$$p^2 - r^2 = 0 \quad \text{ou} \quad r = 0.$$