NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

VIANT

Démonstration de la relation indiquée par M. Mannheim

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 337-338

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__337_1>

DÉMONSTRATION
DE LA RELATION INDIQUÉE PAR M. MANNHEIM

(voir page 123),

PAR M. VIANT,
Professeur de mathématiques spéciales à l'École militaire de la Flèche.

J'écrirai la relation qui définit la courbe (M) de la manière suivante :

$$(1) \qquad \Sigma \frac{\lambda}{r} = \frac{\mu}{R_1}.$$

Je prends les dérivées des deux membres deux fois de suite, ce qui me donne

$$(2) \qquad \Sigma \frac{\lambda r'}{r^2} = \frac{\mu R'_1}{R_1^2},$$

et, en ôtant un facteur après la seconde dérivation,

$$(3) \qquad \Sigma \frac{\lambda(rr'' - 2r'^2)}{r^3} = \frac{\mu(R_1R''_1 - 2R'^2_1)}{R_1^3}.$$

Je multiplie les termes de l'égalité (1) respectivement par

$$\frac{r^2}{r^2},\quad \frac{r_1^2}{r_1^2},\ldots,\quad \frac{R_1^2}{R_1^2},$$

et j'en retranche l'égalité (3); ce qui conduit à

$$(4)\qquad \Sigma\,\frac{\lambda(r^2+2r'^2-rr'')}{r^3}=\frac{\mu(R_1^2+2R_1'^2-R_1R_1'')}{R_1^3}.$$

On sait que l'expression du rayon de courbure est

$$\rho=\frac{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''},\quad \text{ou}\quad \rho=\frac{r^3\left[1+\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2+2r'^2-rr''};$$

ou encore

$$\rho=\frac{r^3}{\cos^3\alpha\,(r^2+2r'^2-rr'')},$$

en se rappelant que

$$\frac{r}{r'}=\operatorname{tang}V=\cot\alpha,$$

V étant l'angle que fait la tangente avec le rayon vecteur, et α celui qu'on a défini dans l'énoncé.

De la dernière formule de ρ on tire

$$\frac{r^2+2r'^2-rr''}{r^3}=\frac{1}{\rho\cos^3\alpha},$$

et en substituant dans l'égalité (4), on a la relation

$$\Sigma\,\frac{\lambda}{\rho\cos^3\alpha}=\frac{\mu}{R\cos^3\varphi}.$$

C. Q. F. D.