Nouvelles annales de mathématiques

Joseph Sacchi

Aire du triangle rectiligne en fonction des bissectrices conjuguées

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 332-334

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__332_0>

AIRE DU TRIANGLE RECTILIGNE EN FONCTION DES BISSECTRICES CONJUGUÉES;

PAR M. JOSEPH SACCHI.

Soient ABC un triangle dont les côtés

$$BC = X_1, \quad CA = X_2, \quad AB = X_3; \quad X_1 < X_2 < X_3;$$

D et D′ les points auxquels le côté BC et son prolongement sont rencontrés par $AD = b_1$, $AD' = b'_1$, bissectrices conjuguées correspondantes à l'angle $BAC = \alpha_1$ opposé au côté X_1; b_2, b'_2; b_3, b'_3, les deux couples de bissectrices correspondantes aux angles α_2, α_3, opposés aux deux autres côtés X_2, X_3; A l'aire du triangle.

Que l'on conduise DE, D′E′, parallèles à AC et qui rencontrent BA et son prolongement en E et E′, et que l'on fasse

$$DE = l, \quad D'E' = l'.$$

Les triangles BDE, BD′E′, semblables à BAC, donnent

$$l = \frac{X_3 X_2}{X_3 + X_2}, \quad l' = \frac{X_3 X_2}{X_3 - X_2};$$

les triangles ADE, AD′E′, isocèles par les propriétés des bissectrices, donnent les équations

$$b_1^2 = 2l^2(1 + \cos\alpha_1), \quad b'^2_1 = 2l'^2(1 - \cos\alpha_1),$$

dont le produit est

$$b_1 b'_1 = 2\, l l' \sin\alpha_1.$$

Remplaçant l et l' par leurs valeurs, et observant que

$$X_2 X_3 \sin\alpha_1 = 2A,$$

on a

$$X_3^2 - X_2^2 = X_3 X_2 \frac{4A}{b_1 b'_1}.$$

D'une manière analogue, on obtiendrait

$$X_3^2 - X_1^2 = X_3 X_1 \frac{4A}{b_2 b'_2}, \quad X_2^2 - X_1^2 = X_2 X_1 \frac{4A}{b_3 b'_3}.$$

Or, en posant

$$\frac{X_3}{X_1} = x, \quad \frac{X_2}{X_1} = y, \quad \frac{1}{b_r b'_r} = q_r, \quad 4Aq_r = p_r,$$

les trois dernières équations donnent les suivantes :

(1) $$x^2 - y^2 = p_1 xy,$$

(2) $$x^2 - 1 = p_2 x,$$

(3) $$y^2 - 1 = p_3 y;$$

de la somme des équations (1) et (3) retranchant l'équation (2), on a

$$y = \frac{p_2 x}{p_1 x + p_3}.$$

Au moyen de cette valeur, l'équation (3) devient

$$(p_1 p_2 p_3 + p_1^2 - p_2^2) x^2 + (p_2 p_3^2 + 2p_1 p_3) x + p_3^2 = 0;$$

additionnant cette dernière équation avec celle qu'on obtient en multipliant par p_3^2 l'équation (2), on a

$$x(p_1 p_2 p_3 + p_1^2 - p_2^2 + p_3^2) + 2p_1 p_3 = 0;$$

éliminant x des deux dernières, on a

$$(p_1 p_2 p_3)^2 = (p_1^2 - p_2^2 + p_3^2)^2 - 4p_1^2 p_3^2,$$

de laquelle, en remplaçant p_r par sa valeur, et en posant

$$q_1 + q_2 + q_3 = 2s,$$

on tire la formule cherchée

$$q_1 q_2 q_3 \mathrm{A} = \sqrt{s(q_1 - s)(q_2 - s)(q_3 - s)}.$$

Si l'on pose

$$2 \sin \frac{\alpha_r}{2} = h_r, \qquad \frac{2}{b_r h_r} = k_r,$$

et si l'on fait la somme des aires des deux triangles dans lesquels le triangle donné est partagé par chacune des bissectrices, on obtient

$$\mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3 = 2\mathrm{A} k_1, \qquad \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_3 = 2\mathrm{A} k_2, \qquad \mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 = 2\mathrm{A} k_3,$$

desquelles on tire les valeurs de x_r qui transforment la formule connue

$$16\mathrm{A}^2 = h_1 h_2 h_3 \mathrm{X}_1 \mathrm{X}_2 \mathrm{X}_3 (\mathrm{X}_1 + \mathrm{X}_2 + \mathrm{X}_3),$$

dans la suivante

$$\frac{1}{\mathrm{A}} = \sqrt{h_1 h_2 h_3} \sqrt{t(t - k_1)(t - k_2)(t - k_3)},$$

où

$$2t = k_1 + k_2 + k_3,$$

qui donne l'aire d'un triangle en fonction des bissectrices intérieures et des sinus des demi-angles du même triangle.