NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

JOSEPH SACCHI

Note sur la généralisation du théorème de Pythagore

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 330-331

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__330_1>

NOTE
SUR LA GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE PYTHAGORE;

PAR M. JOSEPH SACCHI (DE MILAN).

Si entre les côtés a, b, c, d'un triangle rectiligne, respectivement opposés aux angles α, β, γ, *on a la relation* $a^n = b^n + c^n$, *où n et* α *sont des constantes, on aura nécessairement et uniquement* $n = 2$ *et* $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ (*).

En posant

$$\sin\alpha = h, \quad \alpha + \beta = y,$$

et, en substituant, dans la relation donnée, les valeurs

$$b = \frac{a}{h}\sin\beta, \quad c = \frac{a}{h}\sin y,$$

on obtient

$$(1) \qquad h^n = \sin^n\beta + \sin^n y.$$

(*) M. Sacchi a remarqué que la démonstration de cette proposition donnée par M. Umpfenbach (*Nouvelles Annales*, t. VIII, p. 400) est incomplète.

Prenant la dérivée par rapport à β, on a la relation

$$\sin^{n-1}\beta\cos\beta + \sin^{n-1}y\cos y = 0,$$

laquelle, multipliée par $\tang\beta\tang y$, donne

$$\sin^{n}\beta\tang y + \sin^{n}y\tang\beta = 0;$$

éliminant $\sin^n y$ au moyen de l'équation (1), et ensuite remplaçant $\tang y$, $\tang\beta$, $\tang\alpha$, par leurs valeurs respectives

$$\frac{\tang\beta + \tang\alpha}{1 - \tang\beta\tang\alpha}, \quad \frac{\sin\beta}{\sqrt{(1 - \sin^2\beta)}}, \quad \frac{h}{\sqrt{(1 - h^2)}},$$

et posant $\sin\beta = X$, on a

$$Xh^n - X^{n-1} = h^{n-1}\sqrt{(1 - h^2)(1 - X^2)}.$$

De là, en faisant le carré des deux membres, on déduit

$$X^2(X^{2n-4} - 2h^nX^{n-2} + h^{2n-2}) + h^{2n-2}(h^2 - 1) = 0.$$

Cette équation, devant subsister quel que soit X, fournit les deux suivantes

$$h^2 - 1 = 0, \quad X^{2n-4} - 2h^nX^{n-2} + h^{2n-2} = 0,$$

de la première desquelles on tire $h = 1$, ou bien $\alpha = \frac{1}{2}\pi$; et par conséquent la seconde devient

$$(X^{n-2} - 1)^2 = 0,$$

et ne peut être satisfaite, quel que soit X, que par $n = 2$.