Nouvelles annales de mathématiques

Paul Serret

Note sur une formule connue

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 325-327

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__325_1>

NOTE SUR UNE FORMULE CONNUE;

PAR M. PAUL SERRET.

1. « Si une ligne plane admet un diamètre rectiligne, les rayons de courbure de cette ligne, aux extrémités d'une corde AA' conjuguée à ce diamètre, sont inversement proportionnels aux cubes des sinus des angles que forment, avec le diamètre, les tangentes menées par les extrémités de la corde. »

Que l'on considère, en effet, en même temps que la corde fixe AA', deux autres cordes BB', CC', conjuguées au diamètre et infiniment voisines de la première. Les triangles ABC, $A'B'C'$ étant équivalents, le rapport $\frac{R}{R_1}$ des rayons des cercles circonscrits à ces triangles est égal au produit des rapports de leurs côtés homologues; et l'un quelconque de ces derniers rapports a pour limite, quand les points B et C, B' et C' se rapprochent indéfiniment des

(*) M. Serret ne nous ayant pas fait connaître les démonstrations de ces différents théorèmes, nous accepterons celles qui nous seront adressées.

points A et A', le rapport des sinus des angles formés par les tangentes en ces points avec le diamètre.

2. « Si l'on considère une ligne plane quelconque, la tangente en l'un de ses points, et la ligne diamétrale passant par ce point et relative aux cordes parallèles à cette tangente : la tangente trigonométrique de *l'angle d'incidence* de la ligne diamétrale sur la ligne proposée est égale à $\frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}$. » (MACLAURIN.)

$$\tan i = \frac{1}{3}\frac{d\rho}{ds}. \tag{1}$$

Supposons d'abord que la ligne diamétrale se réduise à une droite Ox; considérons une corde AA', parallèle à la tangente Oy et infiniment voisine de cette tangente; et soient ρ et ρ' les rayons de courbure de la ligne proposée en A et A'; t et t' les angles des tangentes aux mêmes points avec le diamètre Ox. On aura, par le lemme précédent,

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\sin^3 t'}{\sin^3 t},$$

$$\frac{\rho - \rho'}{\rho'} = \frac{\sin^3 t' - \sin^3 t}{\sin^3 t},$$

$$-\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{\Delta\rho}{\Delta s} = \frac{1}{\sin^3 t}\cdot\frac{\Delta \sin^3 t}{\Delta s},$$

$\Delta\rho$ et $\Delta \sin^3 t$ désignent les *différences* du rayon de courbure et du nombre $\sin^3 t$ dans le passage de l'origine à l'extrémité de l'arc $AOA' = \Delta s$. D'ailleurs, l'intervalle Δs étant infiniment petit, les rapports des différences peuvent être remplacés par les rapports des différentielles correspondantes; on peut écrire, en simplifiant,

$$-\frac{1}{\rho'}\cdot\frac{d\rho}{ds} = 3\cot t\,\frac{dt}{ds};$$

et, de là, en passant à la limite,

$$-\frac{1}{\rho}\cdot\frac{d\rho}{ds} = 3\,\mathrm{tang}\,i\,\frac{1}{\rho},$$

ou

$$\mathrm{tang}\,i = -\frac{1}{3}\cdot\frac{d\rho}{ds}. \tag{1}$$

La formule (1), ainsi démontrée pour le cas où le diamètre est rectiligne, se trouve établie en même temps pour le cas général. Et cela résulte, d'une manière assez évidente, de ce que l'on peut toujours substituer à une ligne la tangente en l'un de ses points, ou supposer droite cette ligne, quand on a seulement pour objet de déterminer la direction de ses tangentes. Si cependant on ne voulait point se contenter de cette évidence, on pourrait, menant la tangente Ox à la ligne diamétrale en O, associer à l'arc OA de la courbe primitive, situé d'un côté de cette tangente, un second arc auxiliaire OA'_1, situé de l'autre côté, et tel que la nouvelle courbe AOA'_1 possède le diamètre rectiligne Ox. La formule (1) serait applicable à la nouvelle courbe; et le rapport $\frac{d\rho}{ds}$ aurait la même valeur pour celle-ci et pour la proposée. Car on reconnaît aisément que les arcs OA'_1, OA' ont même tangente au point O; que la différence de leurs ordonnées, parallèles à la tangente en O, et terminées à la droite Ox, est du troisième ordre; la différence des ordonnées perpendiculaires à la tangente étant dès lors du quatrième ordre, ce qui entraîne l'égalité des rayons de courbure et du rapport $\frac{d\rho}{ds}$ dans les deux arcs.