PAUL SERRET

Théorèmes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 323-325
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__323_0>

THÉORÈMES;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Soient un polygone inscriptible, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les longueurs de ses côtés; M un point qui se meut sous la condition que ses distances positives $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aux côtés de ce polygone soient liées par la relation

$$(1) \qquad \frac{a_1}{p_1} = \frac{a_2}{p_2} + \ldots + \frac{a_n}{p_n}:$$

le point M décrit l'arc du cercle circonscrit au polygone, sous-tendu par le côté a_1.

Si le polygone est régulier, la relation entre les distances se réduit à celle-ci :

$$(1') \qquad \frac{1}{p_1} = \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_n}.$$

2. Une droite se meut dans le plan d'un polygone *régulier*, de manière que les distances de $q_1, q_2, \ldots, q_n$ des sommets de ce polygone à cette droite, soient liées par la relation

$$(2) \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{1}{q_n}.$$

La droite mobile a pour enveloppe l'arc du cercle inscrit au polygone, sous-tendu par la polaire du premier sommet.

Si le polygone est circonscriptible sans être régulier, il existe encore un théorème analogue se traduisant par une formule semblable à la formule (1).

3. Soient deux séries de cercles orthogonaux et un quadrilatère convexe ayant pour sommets les traces d'un cercle *variable* de la première série sur deux cercles *fixes* de la seconde : les côtés opposés et les diagonales de ce quadrilatère se coupent suivant deux points fixes.

4. Si $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ désignent n arcs formant une proportion arithmétique dont la raison est $\frac{2\pi}{n}$, toutes les racines de l'équation

$$\frac{1}{x - \cos\alpha_1} + \frac{1}{x - \cos\alpha_2} + \ldots + \frac{1}{x - \cos\alpha_n} = 0$$

sont réelles, et $\cos\frac{\pi}{n}$ est l'une de ces racines (conséquence du théorème 2).

5. Soient une spirale logarithmique, une corde mobile vue de l'*origine* sous un angle constant, et le *pôle* de cette corde par rapport à la spirale ou le point de concours des tangentes à la courbe, menées par les extrémités de la corde; l'enveloppe de la corde mobile et la ligne décrite par le pôle sont deux spirales logarithmiques. Le sommet d'un angle constant, circonscrit à une spirale logarithmique, décrit de même une spirale.

6. Un cercle variable passe constamment par le centre d'un cercle donné : l'enveloppe de ce cercle et l'enveloppe de la droite mobile qui réunit ses traces sur le cercle donné sont deux courbes *réciproques*.

L'enveloppe d'une sphère, se mouvant sous une condition analogue, donne lieu à une proposition semblable.

7. Un cercle variable passant constamment par un point fixe O, si l'enveloppe de la droite qui réunit ses

traces sur un cercle fixe, est représentée par l'équation

$$(1) \qquad f(\rho, \omega) = 0,$$

l'équation

$$(2) \qquad f\left(\frac{m}{\rho + n\cos\omega}, \omega\right) = 0,$$

où m et n désignent des constantes, représentera l'enveloppe du cercle variable; et les deux enveloppes seront simultanément *circulaires*, pour trois positions distinctes du point fixe O par rapport au cercle donné (*).