SACCHI

Question 493

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 321-322

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__321_0>

QUESTION 493

(voir tome VIII, page 444).

Soit P *un point d'une courbe* A; C *le centre de courbure en* P; O *un point fixe, origine des rayons vecteurs;* CD *perpendiculaire à* CP; *et* D *le point d'intersection de* CD *avec le rayon vecteur* PO, *ou bien avec son prolongement. Si le rayon de courbure de la courbe* A *est proportionnel à une puissance* n *quelconque de la perpendiculaire conduite de l'origine* O *sur la tangente à la courbe, le rayon de courbure de la développée de* A *et correspondant au point* C *sera égal à* n.CD.

Généralisation et Solution par M. SACCHI (de Milan).

Que l'on tire OQ perpendiculaire à CP; OQ et QP seront les longueurs des perpendiculaires conduites de O sur la normale et sur la tangente à la courbe A en P.

En posant

$$\mathrm{QP} = p, \quad \mathrm{OQ} = q, \quad \mathrm{OP} = r, \quad \mathrm{CP} = \mathrm{R},$$

et en nommant R_1 le rayon de courbure de la développée, α l'angle compris entre R et un axe fixe, et en désignant avec un accent la dérivée par rapport à α, on aura les formules connues

$$\mathrm{R}' = \mathrm{R}_1, \quad p' = q, \tag{1}$$

et à cause des triangles semblables PCD, PQO,

$$\mathrm{CD} = \frac{q}{p}\mathrm{R}. \tag{2}$$

Or, a indiquant une constante et n un nombre quelconque, on a par hypothèse

$$(3) \qquad R = ap^n,$$

et en prenant la dérivée par rapport à α, eu égard aux relations (1), (2), (3), on obtient

$$R_1 = n \,.\, CD,$$

laquelle démontre la proposition énoncée. Le rayon de courbure R_1 doit être porté de C vers D, ou bien en sens contraire, suivant que n est positif ou négatif.

Si dans l'équation (3) on remplace R par sa valeur $\frac{rr'}{p'}$, et qu'on représente par h et k deux constantes, on aura, en intégrant l'équation résultante :

$$r^2 = hp^{n+1} + k,$$

laquelle est l'équation entre r et p de la famille des courbes dont le rayon de courbure satisfait à la condition (3) donnée dans la question.

Cette dernière représente, dans le cas de $n = -3$, les coniques rapportées au centre; $n = 1$ l'épicycloïde rapportée au centre du cercle fixe, et aussi la développante de la circonférence quand on a, en outre, $h = 1$. En supposant dans la même équation $k = 0$, la résultante représente, pour $n = 3$, la parabole rapportée au foyer; $n = 0$, la circonférence rapportée à l'un de ses points; $n = 1$, la spirale logarithmique rapportée au point asymptotique; $n = -3$ l'hyberbole équilatère rapportée au centre; $n = \frac{1}{3}$, la cardioïde rapportée au point de rebroussement; $n = -\frac{1}{3}$, la lemniscate de Bernoulli rapportée au centre; etc.