E.-E. KUMMER

Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 31-41

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__31_1>

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 359);

PAR M. E.-E. KUMMER (*)

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ VI. — *De la mesure de la densité.*

Considérons les quantités ξ, η, ζ qui satisfont à l'équation

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

(*) M. Chasles traitera cette année en Sorbonne les propriétés des lignes dans l'espace; ce qui attache un nouvel intérêt au Mémoire Kummer, que comme les coordonnées rectangulaires d'un point d'une sphère dont le rayon est 1.

A tout rayon du système correspond un point sur la sphère, et à toute série continue de rayons correspond une courbe continue sur la sphère.

Par un point d'un rayon, menons un plan qui lui soit perpendiculaire et traçons une courbe dans ce plan. A la série des rayons qui passent par les différents points de cette courbe correspond une courbe sur la sphère. Imaginons que la première courbe s'écarte infiniment peu du pied du rayon auquel son plan est perpendiculaire et qu'elle détermine tout autour de ce pied une aire infiniment petite; la courbe correspondante sur la sphère sera fermée et son aire sera infiniment petite. Dans le cas particulier où les rayons des systèmes sont normaux à une même surface et où le plan perpendiculaire à un rayon en un point quelconque est remplacé par le plan tangent à la surface à l'origine du rayon, le rapport de ces deux aires infiniment petites a été pris par Gauss pour la mesure de la courbure de la surface. Dans le cas le plus général d'un système de rayons, ce rapport a aussi une très-grande importance; il ne donne plus la mesure de la courbure, mais bien la mesure de la *densité* du système. Nous définirons de la manière suivante la mesure de la densité d'un système de rayons : Si par un point d'un rayon, on mène un plan qui lui soit perpendiculaire, et

---

l'exiguïté de l'espace nous a forcé de morceler. Sa veritable place était dans le *Journal de M. Liouville;* mais le celèbre géomètre, ainsi que M. Poncelet, repoussent les *déterminants.* Rapppelons-nous que Huyghens repoussait la hiérarchie infinitésimale leibnizienne; que Leibniz repoussait l'attraction newtonienne. Cela n'a pas empêché l'une et l'autre de prendre racine, de pousser de vigoureuses tiges, couronnees par la géométrie universelle, par la mecanique analytique, celeste, physique, moléculaire.

Il en sera de même de l'analyse algorithmique. (*Note du Rédacteur.*)

si sur ce plan on trace une courbe fermée qui s'écarte infiniment peu du rayon et dont l'aire soit f, si l'on désigne par φ l'aire de la courbe correspondante sur la sphère, $\frac{\varphi}{f}$ sera *la mesure de la densité du système en ce point.*

Soit dq la distance infiniment petite d'un point de la courbe f au pied du rayon auquel le plan de f est perpendiculaire. Ce point est déterminé par les quantités x, y, z, ξ, η, ζ et son abscisse R. Soient $\varkappa'$, λ', μ' les cosinus des angles que dq forme avec les trois axes, et $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ les quantités qui déterminent le rayon passant par la seconde extrémité de q. D'après les équations (16), § I^er^, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varkappa'\,dq = dx + \mathrm{R}\,d\xi - \xi(\xi dx + \eta dy + \zeta dz),\\ \lambda'\,dq = dy + \mathrm{R}\,d\eta - \eta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz),\\ \mu'\,dq = dz + \mathrm{R}\,d\zeta - \zeta(\xi dx + \eta dy + \zeta dz). \end{array}\right.$$

Soit α l'angle que forme dq avec une perpendiculaire au premier plan principal et par suite $\frac{1}{2}\pi - a$ l'angle que forme dq avec une perpendiculaire au second plan principal, on a

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \varkappa_1\varkappa' + \lambda_1\lambda' + \mu_1\mu',\\ \sin\alpha = \varkappa_2\varkappa' + \lambda_2\lambda' + \mu_2\mu'. \end{array}\right.$$

Multiplions ces deux équations par dq et remplaçons $\varkappa'\,dq$, $\lambda'\,dq$, $\mu'\,dq$ par leurs valeurs (1) et remarquons que

$$\varkappa_1\xi + \lambda_1\eta + \mu_1\zeta = 0,$$
$$\varkappa_2\xi + \lambda_2\eta + \mu_2\zeta = 0,$$

nous obtenons ainsi

$$(3)\begin{cases} dq\cos\alpha = \varkappa_1\,dx + \lambda_1\,dy + \mu_1\,dz + \mathrm{R}\,(\varkappa_1\,d\xi + \lambda_1\,d\eta + \mu_1\,d\zeta), \\ dq\sin\alpha = \varkappa_2\,dx + \lambda_2\,dy + \mu_2\,dz + \mathrm{R}\,(\varkappa_2\,d\xi + \lambda_2\,d\eta + \mu_2\,d\zeta). \end{cases}$$

Remplaçons dans ces formules $\varkappa_1$, λ_1, μ_1, $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 par leurs valeurs (5) et (6) (§ III) et dx, dy, dz, $\xi\, d\eta$, $d\zeta$ par leurs valeurs en fonction des quotients différentiels partiels et des différentielles du et dv, nous obtiendrons

$$(4)\qquad \begin{cases} dq\cos\alpha = -\mathfrak{A}_2\,du - \mathfrak{B}_2\,dv, \\ dq\sin\alpha = +\mathfrak{A}_1\,du + \mathfrak{B}_1\,dv, \end{cases}$$

où nous posons, pour abréger,

$$\mathfrak{A}_1 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}'t_1 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{A}_2 = \frac{\mathrm{e} + \mathrm{f}'t_2 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{E} + \mathfrak{F}t_2)}{\mathrm{V}_2},$$

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g}t_1 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}t_1)}{\mathrm{V}_1},\quad \mathfrak{B}_2 = \frac{\mathrm{f} + \mathrm{g}t_2 + \mathrm{R}\,(\mathfrak{F} + \mathfrak{G}t_2)}{\mathrm{V}_2}.$$

De ces deux équations, il résulte que

$$(5)\qquad \tan\alpha = -\frac{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1 t}{\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2 t},$$

et, par suite,

$$(6)\qquad t = -\frac{\mathfrak{A}_1\cos\alpha + \mathfrak{A}_2\sin\alpha}{\mathfrak{B}_1\cos\alpha + \mathfrak{B}_2\sin\alpha}.$$

Soit $d\sigma$ l'élément de courbe sur la sphère correspondant à dq, les coordonnées des extrémités de cet arc sont ξ, η, ζ, $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$. On a donc

$$(7)\qquad d\sigma = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2} = du\,\sqrt{\mathfrak{E} + 2\mathfrak{F}t + \mathfrak{G}t^2};$$

les cosinus des angles que forme $d\sigma$ sur la sphère avec les trois axes des coordonnées ou $\frac{d\xi}{d\sigma}, \frac{d\eta}{d\sigma}, \frac{d\zeta}{d\sigma}$, sont donc

$$(8)\qquad \frac{\mathrm{a}+\mathrm{a}'t}{\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t+\mathfrak{G}t^2}},\quad \frac{\mathrm{b}+\mathrm{b}'t}{\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t+\mathfrak{G}t^2}},\quad \frac{\mathrm{c}+\mathrm{c}'t}{\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t+\mathfrak{G}t^2}}.$$

Si t_0 représente la valeur de t qui correspond à $\alpha = 0$, on a, d'après l'équation (6),

$$(9)\qquad t_0 = -\frac{\mathfrak{A}_1}{\mathfrak{B}_1},$$

et si l'on désigne par α' l'angle correspondant à α sur la sphère, on a

$$(10)\quad \cos\alpha' = \frac{(\mathrm{a}+\mathrm{a}'t_0)(\mathrm{a}+\mathrm{a}'t)+(\mathrm{b}+\mathrm{b}'t_0)(\mathrm{b}+\mathrm{b}'t)+(\mathrm{c}+\mathrm{c}'t_0)(\mathrm{c}+\mathrm{c}'t)}{\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t_0+\mathfrak{G}t_0^2}\,\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t+\mathfrak{G}t^2}},$$

ou, en simplifiant,

$$(11)\qquad \cos\alpha' = \frac{\mathfrak{E}+\mathfrak{F}t_0+(\mathfrak{F}+\mathfrak{G}t_0)t}{\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t_0+\mathfrak{G}t_0^2}\,\sqrt{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t+\mathfrak{G}t^2}},$$

d'où l'on déduit pour $\operatorname{tang}\alpha'$ la valeur suivante

$$(12)\qquad \operatorname{tang}\alpha' = \frac{\Delta(t-t_0)}{\mathfrak{E}+\mathfrak{F}t_0+(\mathfrak{F}+\mathfrak{G}t_0)t}.$$

En différentiant cette équation, il vient

$$(13)\qquad d\alpha' \frac{\Delta\, dt}{\mathfrak{E}+2\mathfrak{F}t+\mathfrak{G}t^2},$$

et, par suite, d'après l'équation (7),

$$(14)\qquad d\sigma^2\, d\alpha = \Delta\, du^2\, dt.$$

Par la différentiation de l'équation (6), on a

$$(15)\qquad dt = \frac{(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_1)\,d\alpha}{(\mathfrak{B}_1\cos\alpha + \mathfrak{B}_2\sin\alpha)^2},$$

et de la première des équations (4), en y remplaçant $\frac{du}{dv} = t$ par sa valeur en α, équation (6), on tire

$$(16) \qquad dq = \frac{(\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{B}_1 \mathfrak{A}_2)\, du}{\mathfrak{B}_1 \cos\alpha + \mathfrak{B}_2 \sin\alpha};$$

donc

$$(17) \qquad dq^2\, d\alpha = (\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1)\, du^2\, dt.$$

Cette équation et l'équation (14) donnent

$$(18) \qquad d\sigma\, d\alpha' = \frac{\Delta}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1} \cdot dq^2 . d\alpha.$$

Puisque dq est le rayon vecteur et α l'angle correspondant pour la courbe infiniment petite f et que $d\sigma$ est le rayon vecteur et α' l'angle correspondant pour la courbe infiniment petite φ, on a

$$(19) \qquad f = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} dq^2 d\alpha, \quad \varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} d\sigma^2\, d\alpha'.$$

L'intégration de l'équation (18) entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = 2\pi$ qui correspondent aux mêmes limites de α', donne donc

$$(20) \qquad \varphi = -\frac{\Delta}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1} \cdot f.$$

Si l'on désigne par Θ la mesure de la densité, on a

$$(21) \qquad \Theta = \frac{\varphi}{f} = \frac{\Delta}{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 - \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2}.$$

Des relations (4) on tire

$$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1$$
$$= \frac{t_2 - t_1}{V_1 V_2} \left\{ \mathrm{eg} - \mathrm{ff}' + [\mathrm{g}\mathfrak{E} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathfrak{F} + \mathrm{e}\mathfrak{G}]\mathrm{R} + \Delta^2 \mathrm{R}^2 \right\}.$$

D'après les valeurs de ρ_1 et ρ_2, équation (10) (§ IV), on a

$$\mathrm{eg} - \mathrm{ff}' = \rho_1 \rho_2 \Delta,$$

$$\mathrm{g}\mathcal{E} - (\mathrm{f} + \mathrm{f}')\mathcal{F} + \mathrm{e}\mathcal{G} = -(\rho_1 + \rho_2)\Delta^2,$$

et puisque, d'après l'équation (4) (§ III),

$$V_1 V_2 = \Delta (t_2 - t_1),$$

on a

$$(22) \qquad \mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 - \mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_1 = \Delta[\rho_1 \rho_2 - (\rho_1 + \rho_2) R + R^2];$$

donc

$$(23) \qquad \Theta = \frac{1}{\rho_1 \rho_2 - (\rho_1 + \rho_2) R + R^2}$$

ou

$$(24) \qquad \Theta = \frac{1}{(\rho_1 - R)(\rho_2 - R)}.$$

Ainsi :

La mesure de la densité en chaque point d'un rayon est égale à la réciproque du produit des distances de ce point aux foyers du rayon.

Cette mesure est toujours réelle, même quand les foyers sont imaginaires. Pour des systèmes de rayons à surfaces focales réelles, cette mesure est positive pour tous les points situés en dehors des surfaces focales, négative pour les points situés entre ces deux surfaces, et sa valeur négative maximum correspond au centre de chaque rayon ; pour les foyers, elle est infinie. Dans les systèmes à surfaces focales imaginaires, cette mesure est toujours positive et est maxima pour le centre.

Si, avec un rayon donné, on prend tous les rayons infiniment voisins passant dans l'intérieur de la courbe infiniment petite f tracée dans un plan perpendiculaire au rayon donné, on aura un *pinceau* infiniment petit de rayons, terminé par la surface réglée formée par tous les rayons qui s'appuient sur f. L'aire infiniment petite f est la section de ce pinceau infiniment petit. C'est donc la section qui correspond à l'abscisse R. Si l'on considère une section perpendiculaire f' dont l'abscisse soit R′, la courbe qui lui correspond sur la sphère est la courbe φ qui correspond à f; car tous les rayons qui s'appuient sur le contour f s'appuient aussi sur le contour f'. Si l'on désigne la mesure de la densité au point dont l'abscisse est R′ par Θ', on a

$$\frac{\varphi}{f'} = \Theta', \quad \frac{\varphi}{f} = \Theta,$$

d'où

$$\frac{f}{f'} = \frac{\Theta}{\Theta'}. \tag{25}$$

Donc :

Les aires des deux sections d'un pinceau infiniment petit sont inversement proportionnelles aux mesures des densités aux points où passent ces sections.

Si, au lieu de considérer les mesures de la densité, on considère les densités mêmes des rayons d'un pinceau infiniment petit en ses différentes sections, il est clair que ces densités sont dans le rapport inverse des aires des sections du pinceau. En effet, tous les rayons d'un pinceau se distribuent dans toutes les sections de manière à en couvrir toute l'aire, et dans chaque section ils sont d'autant plus rapprochés que ces aires sont plus petites. Donc :

Les densités dans les différentes sections d'un pinceau donné sont proportionnelles aux mesures des densités correspondantes.

Ceci justifie suffisamment la dénomination de *mesure de la densité.*

Pour deux points situés sur des rayons différents ou appartenant à deux pinceaux infiniment petits, le rapport des densités n'est pas nécessairement le même que celui des mesures de la densité. Ceci devient évident quand on considère le système particulier où tous les rayons passent par un même point. Ce système peut être tel, que les rayons s'épanouissent dans tous les sens d'une manière identique ou avec la même densité, ou bien il peut être tel, que le rapprochement des rayons varie avec la direction des rayons. Dans le premier cas, la densité est la même pour tous les points également éloignés du point de départ des rayons et par suite elle est toujours proportionnelle à la mesure de la densité. Dans le second cas, la densité est fonction de la distance au point de départ, mais elle est aussi fonction de la direction. En général, imaginons, comme nous l'avons déjà fait, qu'un système de rayons soit déterminé comme il suit. De chacun des points d'une surface donnée part un rayon dans une direction déterminée. Nous pourrons considérer la densité des différents points du système situés sur cette surface donnée comme une fonction de x, y, z ou, ce qui revient au même, comme une fonction des variables indépendantes u et v. Par suite, la densité en un point donné d'un système sera déterminée par rapport à la densité d'un point situé sur le rayon passant par le point donné. La densité en un point quelconque est égale à la mesure de la densité en ce point multipliée par une fonction de u et de v qui ne renferme pas R et qui, par suite, est la même pour tous les points appartenant à un même rayon. Lorsque cette fonction est constante et que, en conséquence de cela, la densité en tous les points du système est proportionnelle à la mesure de la densité, on pourra dire que le système est *homogène*.

Tous les points des différents rayons d'un système où la mesure de la densité est la même, sont situés sur une surface que l'on peut nommer *surface d'égale mesure de densité*. Comme l'on peut donner à la mesure de la densité toutes les valeurs constantes que l'on veut, il s'ensuit que dans chaque système de rayons il y a une série de surfaces d'égale mesure de densité. Toutes ces surfaces se représentent bien simplement au moyen de l'équation (23)

$$R^2 - (\rho_1 + \rho_2)R + \rho_1\rho_2 = \frac{1}{\Theta}.$$

Supposons Θ constant et résolvons cette équation par rapport à R, nous aurons

$$(26) \qquad R = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{2} + \frac{1}{\Theta}}.$$

Pour chacune de ces valeurs de R,

$$(27) \qquad x' = x + R\xi, \quad y' = y + R\eta, \quad z' = z + R\zeta$$

sont les coordonnées de tous les points du système pour lesquels la mesure de la densité a la valeur constante Θ.

Ces équations (27) sont les équations des surfaces d'égale mesure de densité, en ce sens qu'elles déterminent les coordonnées des points de cette surface en fonction des deux variables indépendantes u et v. Pour que ces surfaces soient réelles, il faut que la valeur de $\frac{1}{\Theta}$ soit comprise entre les limites $-\frac{(\rho_1 - \rho_2)^2}{4}$ et $+\infty$. Pour

$\Theta = \infty$, R n'est réel que si les foyers le sont, et on a

$$R = \rho_1 \quad \text{ou} \quad R = \rho_2,$$

de sorte que les surfaces focales sont des surfaces d'égale mesure de densité. Cette mesure est infiniment grande pour tous les points de ces surfaces.

Si les deux surfaces focales sont réelles et données, en sorte que tous les rayons du système puissent être considérés comme des tangentes communes à ces surfaces, on peut construire facilement les surfaces d'égale mesure de densité. Il suffit pour cela de déterminer sur chaque rayon un point tel, que le produit de ses distances aux foyers du rayon (ou points de contact du rayon avec les surfaces focales) soit égal à une constante donnée. Si cette constante est positive, le point se trouve en dehors des deux foyers; il se trouve entre les deux foyers dans le cas contraire.

(*La fin prochainement.*)