G. BARTET

Solution des questions 622, 621

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 312-315

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__312_1>

SOLUTION DES QUESTIONS 622, 621

(voir p. 171);

PAR M. G. BARTET,
Élève du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant).

1° *Question* 622 (BOBILLIER).

Je prends pour origine le foyer, pour axe des x l'axe de la courbe génératrice, pour plan des xy un plan perpendiculaire au plan sécant; les axes sont d'ailleurs rectangulaires.

L'équation de la courbe méridienne dans le plan des xy est

$$x^2 + y^2 = \varepsilon^2 \gamma^2;$$

ε est l'excentricité, $\gamma = 0$ représente la directrice :

$$\gamma = ax + b.$$

La surface de révolution sera représentée par

$$(1) \qquad x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 \gamma^2.$$

Le plan sécant a pour équation

$$(2) \qquad mx + ny = 1.$$

Le cône ayant pour sommet l'origine et pour directrice la courbe représentée par l'ensemble des équations (1) et (2) a pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2 [ax + b(mx + ny)]^2.$$

Mise sous cette forme, l'équation montre bien que le cône est de révolution, l'axe étant une droite passant par l'origine perpendiculaire au plan

$$ax + b(mx + ny) = 0.$$

Cette droite sera située dans le plan des xy.

Le pôle du plan représenté par l'équation (2) est un point du plan xy. Je dis que l'axe du cône passe par ce point. En effet, considérons la courbe méridienne dans le plan des xy; le cône est coupé par le plan des xy suivant deux génératrices FA, FB. Le plan des xy est coupé suivant la droite AB par le plan donné $mx + ny = 1$. Menons les tangentes à la courbe méridienne en A et B; soit C le pôle ou l'intersection de ces deux tangentes; je sais que FC est bissectrice de l'angle AFB; d'ailleurs l'axe du cône est aussi bissectrice de cet angle : donc ces deux lignes coïncident (*). C. Q. F. D.

2° *Question* 621 (MANNHEIM).

1° On sait que le lieu du point F, en prenant pour origine le point O et pour axe polaire OX, est représenté par l'équation

$$\rho = \frac{p}{\sin 2\omega},$$

p étant le demi-paramètre de la parabole; on a, sur la figure,

$$F'OY = \omega.$$

Par O je mène une parallèle à l'axe de la parabole, OK qui rencontre la tangente au sommet en K. On sait que

$$YOK = FOX = \omega.$$

D'ailleurs $OK = \frac{p}{2}$, donc $OF' = \frac{p}{2\cos 2\omega}$.

Soit $\omega_1 = F'OX = \omega + \frac{\pi}{2}$, on aura $OF' = \frac{-p}{2\cos 2\omega_1}$.

Faisons tourner dans son plan la courbe OF' d'un angle $\frac{\pi}{4}$, Soit $\omega_2 = \omega_1 + \frac{\pi}{4}$, on aura $OF' = -\frac{p}{2\sin 2\omega_2}$; ainsi après cette rotation le lieu de F' devient homothétique avec celui de F, le rapport de similitude étant $\frac{1}{2}$.

2° Dire que la tangente en F au lieu de F passe en F', c'est dire que la sous-tangente de F est OF'. D'après

(*) M. A. Schnée, élève du lycée Charlemagne, a résolu la même question par un moyen semblable.

une formule connue, on a

$$\text{sous-tang} = -\frac{\rho^2}{\rho'} = \frac{p}{2\cos 2\omega};$$

donc la sous-tangente se confond bien avec OF'.

3° De même OC est la sous-tangente du lieu de F' en F'.

En effet, on a

$$\text{sous-tang} = -\frac{\rho^2}{\rho'} = -\frac{p}{4\sin 2\omega_1} = \text{OC};$$

mais

$$\text{OF} = \frac{p}{\sin 2\omega} = -\frac{p}{\sin 2\omega_1},$$

donc

$$\text{OF} = 4\,\text{OC}.$$

C. Q. F. D.

Note. — Des solutions à peu près semblables à celle qui précède nous ont été adressées par MM. L. Abadie; Abraham Schnée, élève du lycée Charlemagne; Frédéric Delafond et G. Mahuet, élèves du lycée de Lyon; G. Halphen, élève du lycée Saint-Louis.

MM. A. Combier, G.-B. (de Florence), J.-J. Hemming, élève de l'Association Polytechnique, à Zurich, ont résolu la même question sans faire usage des coordonnées polaires.