NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

LÉON SANCERY

De la méthode des substitutions successives pour le calcul des racines des équations

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 305-312

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__305_0>

DE LA MÉTHODE DES SUBSTITUTIONS SUCCESSIVES POUR LE CALCUL DES RACINES DES ÉQUATIONS;

PAR M. LÉON SANCERY,
Professeur au lycée d'Auch.

I.

LEMME. — *Si dans une fonction $\varphi(x)$, algébrique ou transcendante, on remplace x par une certaine valeur x_1, puis successivement par les valeurs x_2, x_3, x_4, x_5,... qu'acquiert cette fonction pour les valeurs x_1, x_2, x_3, x_4,..., et si les quantités x_1, x_2, x_3,... tendent vers une certaine limite α, α est une racine de l'équation*

$$x = \varphi(x).$$

En effet, en posant

$$x_n = \alpha - h, \quad x_{n+1} = \alpha - h_1,$$

l'identité

$$x_{n-1} = \varphi(x_n)$$

devient

$$\alpha - h_1 = \varphi(\alpha - h) = \varphi(\alpha) - h\varphi'(\alpha - \theta h).$$

Or, h et h_1 étant des quantités qui par hypothèse tendent indéfiniment vers zéro, la relation précédente devient, en passant aux limites, $\alpha = \varphi(\alpha)$. Cela suppose toutefois que $\varphi'(\alpha)$ est une quantité finie et que $\varphi'(x)$ est continue dans le voisinage de $\varphi'(\alpha)$.

II.

Soient actuellement $F(x) = 0$ une équation algébrique ou transcendante et x_1 une valeur approchée d'une certaine racine α, en sorte qu'entre x_1 et α il n'y ait pas d'autre racine de l'équation. Mettons $F(x) = 0$ sous la forme $x = \varphi(x)$ et remplaçons dans le second membre x par x_1, puis par la valeur x_2 de $\varphi(x_1)$, puis par la valeur x_3 de $\varphi(x_2)$, et ainsi de suite indéfiniment. Si les quantités x_1, x_2, x_3,... ainsi obtenues forment une suite croissante ou décroissante, chaque terme étant, suivant le cas, supérieur ou inférieur à α; ou bien, si ces quantités sont alternativement supérieures et inférieures à α, la valeur absolue de la différence de deux valeurs consécutives tendant indéfiniment vers zéro, la limite de ces quantités ne sera autre que la racine α.

III.

Cherchons quelles sont les conditions que doivent remplir la fonction $\varphi(x)$ et la valeur x_1 pour que les quantités x_1, x_2, x_3,... soient toutes supérieures ou inférieures à une racine α de l'équation $x = \varphi(x)$, et pour qu'elles approchent indéfiniment de cette racine.

Des deux égalités

$$\alpha = \varphi(\alpha), \quad x_{n+1} = \varphi(x_n)$$

on déduit

$$\alpha - x_{n+1} = \varphi(\alpha) - \varphi(x_n)$$

ou bien

$$\begin{aligned} \alpha - x_{n+1} &= \varphi[x_n + (\alpha - x_n)] - \varphi(x_n) \\ &= (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]. \end{aligned}$$

Pour que x_n, x_{n+1} soient des valeurs approchées dans le même sens de la racine α, $\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$ doit être positif et en outre moindre que l'unité, afin que x_{n+1} soit plus approché que x_n.

Si $\varphi'(\alpha)$ est positif et plus petit que l'unité, il existera, en supposant $\varphi(x)$ continue dans le voisinage de $\varphi'(\alpha)$, un certain intervalle renfermant la racine α, pour lequel x croissant, la fonction $\varphi'(x)$ sera continuellement croissante ou décroissante, et offrira par conséquent des valeurs supérieures à zéro et plus petites que l'unité. On pourra donc satisfaire à la double inégalité

$$\varphi'(x) \left| \begin{array}{l} > 0 \\ < 1 \end{array} \right.$$

par une infinité de valeurs différentes de α.

Soient L, L' les limites de cet intervalle, x_n une valeur comprise entre L et L', et supposons que $\varphi'(x)$ augmente avec x. Si $x_n < \alpha$, on aura, θ étant une certaine fraction positive moindre que 1, $x_n + \theta(\alpha - x_n) < \alpha$, et par conséquent

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{array}{l} > 0 \\ < \varphi'(\alpha) \end{array} \right. .$$

Or,

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)],$$

donc x_{n+1} est une valeur inférieure à α, mais plus approchée que x_n.

Pareillement de l'inégalité $x_{n+1} < \alpha$ on déduit

$$x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1}) < \alpha,$$

et par conséquent

$$\varphi'[x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1})] \left| \begin{array}{l} > 0 \\ < \varphi'(\alpha) \end{array} \right. ;$$

donc x_{n+2} est une valeur inférieure à α et plus approchée que x_{n+1}.

Si $x_n > \alpha$, on aura, θ étant toujours un nombre compris entre 0 et 1, $x_n + \theta(\alpha - x_n) > \alpha$, et par suite

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{array}{l} > \varphi'(\alpha) \\ > 1 \end{array} \right. ;$$

or,

$$x_{n+1} - \alpha = (x_n - \alpha)\,\varphi'\,[x_n + \theta\,(\alpha - x_n)],$$

donc x_{n+1} est une valeur supérieure à α, mais approchant plus de α que x_n. De même la valeur x_{n+1} fournira une valeur x_{n+2} supérieure à α, mais plus approchée que x_{n+1}.

On voit par là que lorsque $\varphi'(\alpha)$ est moindre que 1, on peut trouver des valeurs supérieures ou inférieures à α indifféremment, qui, prises pour valeurs initiales ou de départ, fourniront des valeurs successives de plus en plus approchées de la racine α. Il suffit que les valeurs initiales soient comprises entre les quantités L, L' qui rendent $\varphi'(x) \left| \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix} \right.$.

Si $\varphi'(\alpha)$ était supérieur à l'unité, il serait impossible de satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix} \right.$ à l'aide des valeurs voisines de α.

Si $\varphi'(\alpha) = 1$, on pourra encore satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{smallmatrix} > 0 \\ < 1 \end{smallmatrix} \right.$, à moins que $\varphi'(\alpha)$ ne soit un minimum de $\varphi'(x)$, et par conséquent, trouver une valeur de départ qui fournisse des valeurs de plus en plus approchées de la racine.

Toutefois il est bon de remarquer que l'on n'est pas tenu de prendre pour valeur initiale x_1 une quantité comprise entre L et L'. En effet, pour que la valeur x_2 soit plus approchée que la précédente x_1, il suffit, d'après l'égalité

$$\alpha - x_2 = (\alpha - x_1)\,\varphi'\,[x + \theta\,(\alpha - x_1)]$$

que $\varphi'[x_1 + \theta\,(\alpha - x_1)]$ soit positif et moindre que 1. Or, ce résultat peut être obtenu sans que $\varphi'(x_1)$ soit compris entre 0 et 1. Car si $\varphi'(x)$ croît avec x, et que x_1 soit plus petit que α, $x_1 + \theta\,(\alpha - x_1)$ étant plus grand que x_1, on aura

$$\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)] > \varphi'(x_1),$$

et par conséquent il peut se faire que $\varphi'(x_1)$ soit négatif et voisin de zéro, tandis que $\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)]$ est positif et moindre que 1. Si $x_1 > \alpha$, comme $x_1 + \theta(\alpha - x_1)$ est plus petit que x_1, on aura

$$\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)] < \varphi'(x_1),$$

et, par suite, il peut arriver que $\varphi'(x_1)$soit plus grand que 1, en même temps que $\varphi'[x_1 + \theta(\alpha - x_1)]$ est inférieur à l'unité.

En prenant une valeur de départ x_1 ne satisfaisant pas à la condition d'être comprise entre les quantités L et L', on sera tenu de se livrer à une discussion des valeurs successives que l'on obtiendra, afin de montrer qu'elles approchent de plus en plus de la racine α. Toutefois cette discussion ne pourra jamais porter que sur les premières d'entre les valeurs obtenues, car si la méthode est applicable, elle finira par donner des valeurs comprises entre L et L'.

De la relation

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$$

on déduit que la valeur x_{n+1} approchera d'autant plus de α que $\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$ sera plus voisin de zéro, c'est-à-dire que les valeurs successivement obtenues convergeront d'autant plus rapidement vers la racine α que les valeurs de $\varphi'(x)$ seront plus petites. Si $\varphi'(x)$ est une fonction croissante avec x, les valeurs de cette fonction correspondant à des valeurs de x inférieures à α, seront plus petites que les valeurs de cette même fonction relatives à des valeurs de x supérieures à α; il sera donc plus avantageux de choisir entre deux valeurs également approchées de la racine α, celle qui l'est par défaut. Si au contraire $\varphi'(x)$ est une fonction décroissante quand x croît, il vaudra mieux prendre pour valeur de départ une valeur approchée par excès.

IV.

Établissons les conditions auxquelles doivent satisfaire la fonction $\varphi(x)$ et la quantité x_1 pour que les valeurs $x_1, x_2, x_3, \ldots$ soient alternativement supérieures et inférieures à α, et que la différence de deux valeurs consécutives tende indéfiniment vers zéro.

Des égalités $\alpha = \varphi(\alpha)$, $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, on déduit

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)].$$

Pour que les quantités x_{n+1}, x_n soient l'une supérieure, l'autre inférieure à α, les deux différences $\alpha - x_{n+1}$, $\alpha - x_n$ doivent être de signes contraires, et pour cela il faut que $\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)]$ soit négatif. De plus,

$$x_{n+1} = \varphi(x_n), \quad x_{n+2} = \varphi(x_{n+1}) = \varphi[x_n + (x_{n+1} - x_n)],$$

on aura donc

$$x_{n+2} - x_{n+1} = (x_{n+1} - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta_1(x_{n+1} - x_n)],$$

et afin que $x_{n+2} - x_{n+1}$ ait une valeur absolue moindre que celle de $x_{n+1} - x_n$, il faut que la valeur absolue de $\varphi'[x_n + \theta_1(x_{n+1} - x_n)]$ soit moindre que 1.

Si $\varphi'(\alpha)$ est compris entre 0 et -1, et si $\varphi'(x)$ est une fonction continue dans le voisinage de $\varphi'(\alpha)$, on pourra trouver deux quantités L, L' comprenant la racine α et telles que, dans l'intervalle L... L', $\varphi'(x)$ soit continuellement croissante ou décroissante et acquière une valeur négative plus grande que -1. Posons

$$L < \alpha < L'$$

et soit x_n une valeur comprise entre L et L′ de telle sorte que la différence $\alpha - x_n$ soit en valeur absolue moindre que la plus petite des différences $\alpha - L$, $L' - \alpha$. x_n peut être supérieur à α; alors, en admettant que $\varphi'(x)$ soit croissante avec x, on aura

$$\varphi'(x_n) \left| \begin{matrix} < 0 \\ > \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right.,$$

et comme on a

$$x_n + \theta(\alpha - x_n) > \alpha,$$

on aura de même

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \left| \begin{matrix} < 0 \\ > \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right..$$

Donc, d'après l'égalité

$$\alpha - x_{n+1} = (\alpha - x_n)\,\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)],$$

la différence $\alpha - x_{n+1}$ sera de signe contraire à $\alpha - x_n$, c'est-à-dire positive et moindre que sa valeur numérique. Conséquemment x_{n+1} sera une valeur plus approchée de α et comprise entre L et L′. De l'inégalité $x_{n+1} < \alpha$, on conclut

$$x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1}) < \alpha,$$

donc

$$\varphi'[x_{n+1} + \theta(\alpha - x_{n+1})] \left| \begin{matrix} > -1 \\ < \varphi'(\alpha) \end{matrix} \right.;$$

la valeur $\alpha - x_{n+2}$ sera donc de signe contraire à $\alpha - x_{n+1}$, c'est-à-dire négative et en valeur absolue moindre qu'elle. x_{n+2} est ainsi plus approché que x_{n+1} et nécessairement aussi plus approché que x_n. On arrivera aux mêmes résultats en supposant x_n inférieur à α.

Si $\varphi'(\alpha) < -1$, il est impossible de satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \left| \begin{matrix} < 0 \\ > -1 \end{matrix} \right.$ par des valeurs voisines de α.

Si $\varphi'(\alpha) = -1$, on pourra toujours satisfaire à l'inégalité $\varphi'(x) \Big| \begin{smallmatrix} < 0 \\ > -1 \end{smallmatrix}$, à moins que $\varphi'(x)$ ne soit un maximum de $\varphi'(x)$.

On vient de voir que si $\varphi'(\alpha) \Big| \begin{smallmatrix} < 0 \\ > -1 \end{smallmatrix}$, on peut trouver une valeur de départ qui donne des valeurs de plus en plus approchées de la racine α, alternativement par défaut et par excès. Toutefois, puisqu'il suffit, pour un juste emploi de la méthode, que $\varphi'[x_n + \theta_1(x_{n+1} - x_n)$ soit compris entre o et -1, il est bon de remarquer que cette condition peut être remplie sans qu'on ait

$$\varphi'[x_n + \theta(\alpha - x_n)] \Big| \begin{smallmatrix} < 0 \\ > -1 \end{smallmatrix},$$

ou en valeur absolue $\alpha - x_{n+1} < \alpha - n$, c'est-à-dire sans que la valeur x_n soit située dans le plus petit des deux intervalles L'... α, α... L et même sans que $\varphi'(x_n)$ soit compris entre o et -1. Mais lorsque la valeur x_n ne sera pas située dans le plus petit des intervalles L'... α, α... L, une discussion des valeurs successivement obtenues est indispensable. (*La suite prochainement.*)