Painvin

Mémoire sur les tétraèdres. Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 267-286

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__267_0>

MÉMOIRE SUR LES TÉTRAÈDRES.

Détermination du volume maximum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données;

PAR M. PAINVIN.

Présenté à l'Académie en janvier 1862.

1. Dans son Mémoire sur les pyramides, Lagrange aborde le problème suivant : « Déterminer le volume maximum ou minimum d'un tétraèdre dont les faces ont des aires données. » La question a été ramenée à l'étude d'une équation du quatrième degré; mais Lagrange s'est arrêté à ce point. Pour terminer ce problème intéressant, il restait à faire une discussion plus approfondie de cette équation et à signaler les diverses propriétés géométriques des tétraèdres qui satisfont à la condition du maximum.

C'est là l'objet du présent Mémoire.

§ I. — *Théorème préliminaire.*

2. Je commencerai par établir un théorème dont on peut déduire, comme cas particulier, les formules données par Lagrange dans le Mémoire déjà cité.

Soit un déterminant λ; supposons qu'on prenne le déterminant réciproque de λ, puis qu'on fasse le carré de ce déterminant réciproque; maintenant effectuons ces opérations en sens inverse, c'est-à-dire faisons le carré de λ, et prenons ensuite le déterminant réciproque de ce carré; les deux déterminants définitifs obtenus par ces deux séries d'opérations sont identiques élément à élément.

3. Pour démontrer cette proposition, je rappellerai d'abord les propriétés fondamentales bien connues des déterminants réciproques : si P est un déterminant du $n^{ième}$ degré, dont les éléments sont a_{rs}, et que S soit le déterminant réciproque, dont les éléments seront $\alpha_{rs} = \frac{dP}{da_{rs}}$, on a les relations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} & S = P^{n-1}, \\ & \frac{dS}{d\alpha_{rs}} = P^{n-2} a_{rs}. \end{aligned} \right.$$

Désignons par λ le déterminant :

$$(2) \qquad \lambda = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \ldots & u_1 & v_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \ldots & u_2 & v_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & y_n & z_n & \ldots & u_n & v_n \end{vmatrix},$$

les lettres $x, y, z, \ldots, u, v$ étant en nombre n.

Formons le *déterminant réciproque* de λ ; désignant par L ce nouveau déterminant et posant

$$(3) \quad X_i = \frac{d\lambda}{dx_i}, \quad Y_i = \frac{d\lambda}{dy_i}, \quad Z_i = \frac{d\lambda}{dz_i}, \ldots, \quad V_i = \frac{d\lambda}{dv_i},$$

on a

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & L = \lambda^{n-1} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 & \ldots & U_1 & V_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 & \ldots & U_2 & V_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_n & Y_n & Z_n & \ldots & U_n & V_n \end{vmatrix}, \\ & \frac{dL}{dX_i} = \lambda^{n-2} x_i, \quad \frac{dL}{dY_i} = \lambda^{n-2} y_i, \ldots, \quad \frac{dL}{dV_i} = \lambda^{n-2} v_i. \end{aligned} \right.$$

Formons ensuite le *carré* du déterminant L ; en représentant par M ce troisième déterminant et en posant

$$(5) \qquad A_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + X_i Z_k + \ldots + V_i V_k,$$

on trouve

$$(6)\qquad M = L^2 = \lambda^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Maintenant effectuons ces opérations dans un ordre inverse, c'est-à-dire formons le carré du déterminant λ (en combinant les lignes et les colonnes comme il a été fait la première fois), puis prenons le réciproque du déterminant ainsi obtenu.

Désignant par $\mathfrak{L}$ le carré du déterminant λ et posant

$$(7)\qquad a_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k + \dots + v_i v_k,$$

nous aurons

$$(8)\qquad \mathfrak{L} = \lambda^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Si l'on représente enfin par $\mathfrak{M}$ le réciproque de $\mathfrak{L}$ et qu'on pose

$$(9)\qquad \alpha_{rs} = \frac{d\mathfrak{L}}{da_{rs}},$$

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{M} = \mathfrak{L}^{n-1} = \lambda^{2(n-1)} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \alpha_{n3} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix}, \\ &\frac{d\mathfrak{M}}{d\alpha_{rs}} = \mathfrak{L}^{n-2} a_{rs} = \lambda^{2(n-1)} a_{rs}. \end{aligned}\right.$$

4. Il s'agit de démontrer que les déterminants M et $\mathfrak{M}$ sont identiques élément à élément.

Le déterminant (8) nous fournit le groupe des relations

$$(11)\qquad \begin{cases} a_{k1}\alpha_{i1} + a_{k2}\alpha_{i2} + \ldots + a_{kn}\alpha_{in} = 0, \\ a_{i1}\alpha_{i1} + a_{i1}\alpha_{i2} + \ldots + a_{in}\alpha_{in} = \lambda^2. \end{cases}$$

Remarquons, d'un autre côté, que

$$(12)\qquad \begin{cases} a_{1k}X_1 + a_{2k}X_2 + a_{3k}X_3 + \ldots + a_{nk}X_n = \lambda x_k, \\ a_{1k}Y_1 + a_{2k}Y_2 + a_{3k}Y_3 + \ldots + a_{nk}Y_n = \lambda y_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

car, en ayant égard aux valeurs (7), le premier membre de la première égalité, par exemple, devient

$$\begin{gathered} x_k(x_1X_1 + x_2X_2 + \ldots + x_nX_n) \\ + y_k(y_1X_1 + y_2X_2 + \ldots + y_nX_n) + \ldots \\ + v_k(v_1X_1 + v_2X_2 + \ldots + v_nX_n), \end{gathered}$$

ou, d'après les formules (3),

$$\begin{gathered} x_k\left(x_1\frac{d\lambda}{dx_1} + x_2\frac{d\lambda}{dx_2} + \ldots + x_n\frac{d\lambda}{dx_n}\right) \\ + y_k\left(y_1\frac{d\lambda}{dx_1} + y_2\frac{d\lambda}{dx_2} + \ldots + y_n\frac{d\lambda}{dx_n}\right) + \ldots = \lambda x_k. \end{gathered}$$

Faisons alors, dans les égalités (11), $k = 1, 2, \ldots, n$ et multiplions les relations obtenues respectivement par X_1, $X_2, \ldots, X_n$, ou par $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, \ldots$, puis ajoutons, en faisant intervenir les formules (12), on arrive aux relations importantes

$$(13)\qquad \begin{cases} x_1\alpha_{i1} + x_2\alpha_{i2} + \ldots + x_n\alpha_{in} = \lambda X_i, \\ y_1\alpha_{i1} + y_2\alpha_{i2} + \ldots + y_n\alpha_{in} = \lambda Y_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ v_1\alpha_{i1} + v_2\alpha_{i2} + \ldots + v_n\alpha_{in} = \lambda V_i. \end{cases}$$

Si maintenant on multiplie ces dernières égalités respectivement par X_k, $Y_k, \ldots, V_k$ et qu'on ajoute, il vient, eu égard à la définition des X_k, $Y_k, \ldots, V_k$,

$$\lambda \alpha_{ik} = \lambda (X_i X_k + Y_i Y_k + \ldots + V_i V_k),$$

ou

$$(14) \qquad \alpha_{ik} = A_{ik};$$

c'est l'identité qu'il fallait établir.

§ II. — *Formules relatives aux tétraèdres.*

5. Je réunirai dans ce paragraphe diverses formules relatives aux tétraèdres, formules dont nous ferons constamment usage dans la suite de ce Mémoire; quelques-unes de ces relations ont été déjà indiquées plus ou moins explicitement. Le point de départ que je choisis en permet une déduction facile.

Appliquons les formules du premier paragraphe au cas particulier de trois variables, nous avons

$$(1) \qquad \lambda = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

$$(2) \qquad L = \lambda^2 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_2 & Z_3 \end{vmatrix}$$

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} X_i &= \frac{d\lambda}{dx_i}, \\ Y_i &= \frac{d\lambda}{dy_i}, \\ Z_i &= \frac{d\lambda}{dz_i}, \end{aligned} \right.$$

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{dL}{dX_i} = \lambda x_i, \\ \dfrac{dL}{dY_i} = \lambda y_i, \\ \dfrac{dL}{dZ_i} = \lambda z_i, \end{cases}$$

$$(5)\qquad \begin{cases} M = \lambda^4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ A_{ik} = X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k, \end{cases}$$

$$(6)\qquad \begin{cases} \mathfrak{L} = \lambda^2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ a_{ik} = x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k, \end{cases}$$

$$(7)\qquad \begin{cases} \mathfrak{M} = \lambda^4 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \\ \alpha_{rs} = \dfrac{d\mathfrak{L}}{da_{rs}}, \quad \dfrac{d\mathfrak{M}}{da_{rs}} = \lambda^2 a_{rs}, \end{cases}$$

et enfin

$$(8)\qquad \alpha_{rs} = A_{rs}.$$

6. Regardons x_1, y_1, z_1 comme les coordonnées rectangulaires d'un point M_1; x_2, y_2, z_2 étant celles d'un point M_2; x_3, y_3, z_3 celles d'un point M_3; on sait que λ est égal à six fois le volume du tétraèdre $OM_1M_2M_3$, O étant l'origine des coordonnées. Mais ici « nous devrons convenir de regarder le volume λ comme *positif* ou comme » *négatif,* suivant que la rotation déterminée par l'ordre » des trois points M_1, M_2, M_3 est ou n'est pas de même

» sens que la rotation déterminée par les trois axes x,
» y, z. »

Nous introduirons les notations suivantes :

$$(9)\quad \begin{cases} 2.\text{aire}\, OM_2M_3 = 2s_1 = \sqrt{f_1}, \\ 2.\text{aire}\, OM_3M_1 = 2s_2 = \sqrt{f_2}, \\ 2.\text{aire}\, OM_1M_2 = 2s_3 = \sqrt{f_3}, \\ 2.\text{aire}\, M_1M_2M_3 = 2s = \sqrt{f}, \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} OM_1 = r_1, & M_2M_3 = \rho_1, \\ OM_2 = r_2, & M_3M_1 = \rho_2, \\ OM_3 = r_3, & M_1M_2 = \rho_3, \end{cases}$$

(11)
- A_1 axe du plan OM_2M_3, prolongé à partir du point O, du côté du sommet M_1,
- A_2 axe du plan OM_3M_1, prolongé à partir du point O, du côté du sommet M_2,
- A_3 axe du plan OM_1M_2, prolongé à partir du point O, du côté du sommet M_3,
- A axe du plan $M_1M_2M_3$, prolongé à partir du point O, à l'opposé de la face $M_1M_2M_3$.

7. Pour établir sans ambiguïté la direction des axes, je rappelle que le double de l'aire d'un triangle OAB est représenté par

$$2.OAB = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

(x_1, y_1) étant les coordonnées du point A, (x_2, y_2) celles du point B. « Nous devrons en outre regarder la surface » comme *positive* ou *négative*, suivant que la rotation, » pour aller de A vers B, est ou n'est pas de même sens » que la rotation qui sert à déterminer les angles posi- » tifs. » Quant au sens des angles positifs sur les plans coordonnés, il sera

$$xy,\quad yz,\quad xz.$$

Maintenant, sachant que la projection d'une surface plane est égale à l'aire de la surface multipliée par le cosinus de l'angle des axes des deux plans, ayant égard à la formule que nous venons de citer et aux deux conventions que nous venons de poser, on constatera, sans difficulté, qu'on a dans tous les cas

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\lambda}{dx_i} &= X_i = \sqrt{f_i}\cos(A_i x),\\ \frac{d\lambda}{dy_i} &= Y_i = \sqrt{f_i}\cos(A_i y),\\ \frac{d\lambda}{dz_i} &= Z_i = \sqrt{f_i}\cos(A_i z); \end{aligned}\right.$$

X_i, Y_i, Z_i ont les valeurs (3); $\sqrt{f_i}$ est le double de la valeur numérique s_i; A_i est l'axe de la face s_i, prolongé, à partir de la face, du côté du sommet opposé à cette face; λ est ici la valeur absolue du volume, et par conséquent a pour expression le déterminant (1) précédé du signe $+$ ou $-$, suivant que la rotation $M_1 M_2 M_3$ est ou n'est pas de même sens que la rotation xyz. Les axes A_1, A_2, A_3 sont donc nettement définis par les formules (12).

Nous conclurons de suite des formules (10) et (12)

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} a_{ii} &= x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = r_i^2;\\ a_{ik} &= x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k = r_i r_k \cos(r_i r_k); \end{aligned}\right.$$

$$(14)\left\{\begin{aligned} A_{ii} &= X_i^2 + Y_i^2 + Z_i^2 = 4s_i^2 = f_i,\\ A_{ik} &= X_i X_k + Y_i Y_k + Z_i Z_k = 4 s_i s_k \cos(A_i A_k) = \sqrt{f_i f_k}\cos(A_i A_k); \end{aligned}\right.$$

l'angle $(A_i A_k)$ est le supplément du dièdre formé par les faces s_i, s_k, qui ont respectivement pour axes A_i, A_k.

8. La ligne A est perpendiculaire à la face $M_1M_2M_3$ et prolongée, à partir de l'origine, du côté opposé à cette face. Or le plan de cette face a pour équation

$$P = \begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0;$$

je désignerai par P le premier membre de cette équation.

On a d'abord

$$(1^\circ) \qquad x\frac{dP}{dx} + y\frac{dP}{dy} + z\frac{dP}{dz} + \lambda = 0.$$

D'un autre côté, si α, β, γ sont les angles avec les axes positifs de coordonnées de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan et prise dans le sens de l'origine au plan, et si p est la longueur absolue de cette perpendiculaire, l'équation de la face $M_1M_2M_3$ sera aussi

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + r\cos\gamma - p = 0,$$

ou, d'après la définition de l'axe A,

$$(2^\circ) \qquad x\cos(Ax) + y\cos(Ay) + z\cos(Az) + p = 0.$$

La comparaison des équations (1°) et (2°) nous donne

$$\cos(Ax) = \frac{\frac{dP}{dx}}{k}, \qquad \cos(Ay) = \frac{\frac{dP}{dy}}{k},$$

$$\cos(Az) = \frac{\frac{dP}{dz}}{k}, \qquad p = \frac{\lambda}{k}.$$

Or $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dP}{dy}$, $\frac{dP}{dz}$ sont, en valeur absolue, les projections de l'aire $2s$ sur les plans yz, xz, xy; donc

$$\left(\frac{dP}{dx}\right)^2+\left(\frac{dP}{dy}\right)^2+\left(\frac{dP}{dz}\right)^2=4s^2=f;$$

par suite

$$k^2=f,\quad k=\pm\sqrt{f}.$$

Mais $p=\frac{\lambda}{k}$; comme p est un nombre absolu et que λ est positif (7), on devra prendre $k=+\sqrt{f}$.

Ainsi, l'axe A sera nettement défini par les relations suivantes :

$$(15)\quad\left\{\begin{aligned}
\sqrt{f}\cos(\mathrm{A}x)&=\frac{dP}{dx}=-\begin{vmatrix}1 & y_1 & z_1\\ 1 & y_2 & z_2\\ 1 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=-\left(\frac{d\lambda}{dx_1}+\frac{d\lambda}{dx_2}+\frac{d\lambda}{dx_3}\right)=-(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2+\mathrm{X}_3),\\
\sqrt{f}\cos(\mathrm{A}y)&=\frac{dP}{dy}=+\begin{vmatrix}1 & x_1 & z_1\\ 1 & x_2 & z_2\\ 1 & x_3 & z_3\end{vmatrix}=-\left(\frac{d\lambda}{dy_1}+\frac{d\lambda}{dy_2}+\frac{d\lambda}{dy_3}\right)=-(\mathrm{Y}_1+\mathrm{Y}_2+\mathrm{Y}_3),\\
\sqrt{f}\cos(\mathrm{A}z)&=\frac{dP}{dz}=-\begin{vmatrix}1 & x_1 & y_1\\ 1 & x_2 & y_2\\ 1 & x_3 & y_3\end{vmatrix}=-\left(\frac{d\lambda}{dz_1}+\frac{d\lambda}{dz_2}+\frac{d\lambda}{dz_3}\right)=-(\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2+\mathrm{Z}_3).
\end{aligned}\right.$$

La quantité λ, représentant ici la valeur absolue du volume, aura pour expression le déterminant (1); mais ce déterminant devra être précédé du signe $+$ ou $-$, suivant que la rotation $M_1 M_2 M_3$ est ou n'est pas de même sens que la rotation xyz.

L'angle (AA_i) est le supplément du dièdre formé par les faces s, s_i, qui ont respectivement pour axes A, A_i.

9. Ces formules vont nous permettre de démontrer plusieurs relations importantes entre les éléments d'un tétraèdre.

Si l'on ajoute les équations (15) membre à membre, après avoir élevé au carré, on trouve, en ayant égard aux relations (14),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} f = {} & f_1 + f_2 + f_3 + 2\sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) \\ & + 2\sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) + 2\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3). \end{aligned}\right.$$

Cette égalité a été signalée par Lagrange. Mais il est important d'établir les relations homologues; on peut le faire de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \sqrt{ff_i}\cos(AA_i) = {} & \sqrt{ff_i} \\ & \times[\cos(Ax) + \cos(A_i x) + \cos(Ay)\cos(A_i y) + \cos(Az)\cos(A_i z)] \\ = {} & -X_i(X_1 + X_2 + X_3) - Y_i(Y_1 + Y_2 + Y_2) - Z_i(Z_1 + Z_2 + Z_3); \end{aligned}$$

d'où il résulte, d'après les valeurs (14), en faisant $i = 1, 2, 3$,

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} & f_1 + \sqrt{ff_1}\cos(AA_1) + \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) + \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) = 0, \\ & f_2 + \sqrt{ff_2}\cos(AA_2) + \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) + \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = 0, \\ & f_3 + \sqrt{ff_3}\cos(AA_3) + \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) + \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = 0, \\ & f + \sqrt{ff_1}\cos(AA_1) + \sqrt{ff_2}\cos(AA_2) + \sqrt{ff_3}\cos(AA_3) = 0. \end{aligned}\right.$$

La dernière relation du groupe (17) s'obtient en ajoutant les trois premières membre à membre et en ayant égard à l'égalité (16).

Maintenant si l'on ajoute membre à membre trois des égalités (17) et qu'on en retranche la quatrième, on arrive au groupe suivant :

$$
(\mathrm{I})\left\{\begin{aligned}
f&=f_1+f_2+f_3+2\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2)+2\sqrt{f_1f_3}\cos(A_1A_3)+2\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3),\\
f_1&=f_2+f_3+f+2\sqrt{ff_2}\cos(AA_2)+2\sqrt{ff_3}\cos(AA_3)+2\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3),\\
f_2&=f_3+f+f_1+2\sqrt{ff_3}\cos(AA_3)+2\sqrt{ff_1}\cos(AA_1)+2\sqrt{f_1f_3}\cos(A_1A_3),\\
f_3&=f+f_1+f_2+2\sqrt{ff_1}\cos(AA_1)+2\sqrt{ff_2}\cos(AA_2)+2\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2).
\end{aligned}\right.
$$

Ce sont les formules analogues de celles des triangles.

Des formules (17), on déduit les nouvelles relations (je crois qu'elles n'ont pas encore été données) :

$$
(\mathrm{I}\ bis)\left\{\begin{aligned}
f+f_1+2\sqrt{ff_1}\cos(AA_1)&=f_2+f_3+2\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3),\\
f+f_2+2\sqrt{ff_2}\cos(AA_2)&=f_3+f_1+2\sqrt{f_3f_1}\cos(A_3A_1),\\
f+f_3+2\sqrt{ff_3}\cos(AA_3)&=f_1+f_2+2\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2).
\end{aligned}\right.
$$

Les formules (13), (14), (8), (7) et (6) nous fournissent l'expression des dièdres en fonction des arêtes et des angles des faces :

$$
(\mathrm{II})\left\{\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
\sqrt{f_2f_3}\cos(A_2A_3)&=r_1^2r_2r_3[\cos(r_1r_2)\cos(r_1r_3)-\cos(r_2r_3)],\\
\sqrt{f_3f_1}\cos(A_3A_1)&=r_2^2r_3r_1[\cos(r_2r_1)\cos(r_2r_3)-\cos(r_1r_3)],\\
\sqrt{f_1f_2}\cos(A_1A_2)&=r_3^2r_1r_2[\cos(r_3r_1)\cos(r_3r_2)-\cos(r_1r_2)],
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\sqrt{f_2f_3}\sin(A_2A_3)&=\lambda r_1,\\
\sqrt{f_3f_1}\sin(A_3A_1)&=\lambda r_2,\\
\sqrt{f_1f_2}\sin(A_1A_2)&=\lambda r_3.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.
$$

Les formules (17) conduiraient aux valeurs des angles AA_1, AA_2, AA_3 ; mais il sera plus simple d'introduire les distances ρ_1, ρ_2, ρ_3, auquel cas leur expression se déduira du groupe (II) par un simple changement de lettres.

Les relations (7), (6), (13) et (14) nous donnent le groupe similaire

$$
\text{(II } bis\text{)}\quad\left\{
\begin{aligned}
\lambda^2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) &= f_1 \sqrt{f_2 f_3}\,[\cos(A_1 A_2)\cos(A_1 A_3) - \cos(A_2 A_3)],\\
\lambda^2 r_3 r_1 \cos(r_3 r_1) &= f_2 \sqrt{f_1 f_3}\,[\cos(A_2 A_1)\cos(A_2 A_3) - \cos(A_3 A_1)],\\
\lambda^2 r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) &= f_3 \sqrt{f_1 f_2}\,[\cos(A_3 A_1)\cos(A_3 A_1) - \cos(A_1 A_2)].
\end{aligned}\right.
$$

10. *Volume.* — Le volume peut s'exprimer à l'aide des arêtes et des angles des faces, ou à l'aide des aires des faces, et des dièdres; les formules (6), (7), (8), (13) et (14) nous conduisent immédiatement à ces expressions.

On a ainsi

$$
\text{(III)}\quad\left\{
\begin{aligned}
\lambda^2 &= \begin{vmatrix} r_1^2 & r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) & r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) \\ r_2 r_1 \cos(r_2 r_1) & r_2^2 & r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) \\ r_3 r_1 \cos(r_3 r_1) & r_3 r_2 \cos(r_3 r_2) & r_3^2 \end{vmatrix} = r_1^2 r_2^2 r_3^2 \begin{vmatrix} 1 & \cos(r_1 r_2) & \cos(r_1 r_3) \\ \cos(r_2 r_1) & 1 & \cos(r_2 r_3) \\ \cos(r_3 r_1) & \cos(r_3 r_2) & 1 \end{vmatrix}\\
\lambda^4 &= \begin{vmatrix} f_1 & \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) & \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) \\ \sqrt{f_2 f_1}\cos(A_2 A_1) & f_2 & \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) \\ \sqrt{f_3 f_1}\cos(A_3 A_1) & \sqrt{f_3 f_2}\cos(A_3 A_2) & f_3 \end{vmatrix} = f_1 f_2 f_3 \begin{vmatrix} 1 & \cos(A_1 A_2) & \cos(A_1 A_3) \\ \cos(A_2 A_1) & 1 & \cos(A_2 A_3) \\ \cos(A_3 A_1) & \cos(A_3 A_2) & 1 \end{vmatrix}\\
\lambda &= r_1 \rho_1 d_1 \sin(r_1 \rho_1) = r_2 \rho_2 d_2 \sin(r_2 \rho_2) = r_3 \rho_3 d_3 \sin(r_3 \rho_3).
\end{aligned}\right.
$$

La dernière relation de ce groupe est la traduction du théorème bien connu sur le volume du tétraèdre en fonction des arêtes opposées; d_1, d_2, d_3 sont les plus courtes distances des arêtes opposées $(r_1\rho_1)$, $(r_2\rho_2)$, $(r_3\rho_3)$.

10. *Arêtes et angles des faces.* — L'angle de deux arêtes opposées, telles que r_1 et ρ_1 par exemple, s'obtiendra facilement en remarquant que

$$\begin{aligned} r_1\rho_1\cos(r_1\rho_1) &= x_1(x_2-x_3)+y_1(y_2-y_3)+z_1(z_2-z_3) \\ &= r_1r_2\cos(r_1r_2)-r_1r_3\cos(r_1r_3); \end{aligned}$$

On trouve ainsi

$$(\mathrm{IV})\quad\left\{\begin{array}{l} r_1\rho_1\cos(r_1\rho_1)=r_1r_2\cos(r_1r_2)-r_1r_3\cos(r_1r_3), \\ r_2\rho_2\cos(r_2\rho_2)=r_2r_3\cos(r_2r_3)-r_2r_1\cos(r_2r_1), \\ r_3\rho_3\cos(r_3\rho_3)=r_3r_1\cos(r_3r_1)-r_3r_2\cos(r_3r_2); \\ \quad\text{d'où} \\ r_1\rho_1\cos(r_1\rho_1)+r_2\rho_2\cos(r_2\rho_2)+r_3\rho_3\cos(r_3\rho_3)=0. \end{array}\right.$$

11. Pour obtenir la plus courte distance des deux arêtes opposées r_1 et ρ_1, je remarque que le plan, passant par M_2M_3 et parallèle à OM_1, a pour équation

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & z \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus courte distance d_1 sera la distance de l'origine à ce plan, ce qui donne

$$d_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}}{\sqrt{\begin{vmatrix} 0 & y_1 & z_1 \\ 1 & y_2 & z_2 \\ 1 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & x_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & z_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}^2}},$$

ou, en ayant égard aux formules (3) et (14),

$$d_1 = \frac{\lambda}{\sqrt{(X_2+X_3)^2+(Y_2+Y_3)^2+(Z_2+Z_3)^2}}$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{f_2+f_3+2\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3)}}.$$

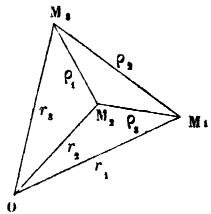
On arrive donc au groupe suivant :

$$(\mathrm{V}) \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1^2 = \dfrac{\lambda^2}{f_2+f_3+2\sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3)}, \\ d_2^2 = \dfrac{\lambda^2}{f_3+f_1+2\sqrt{f_3 f_1}\cos(A_3 A_1)}, \\ d_3^2 = \dfrac{\lambda^2}{f_1+f_2+2\sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2)}; \\ \text{d'où} \\ \dfrac{1}{d_1^2}+\dfrac{1}{d_2^2}+\dfrac{1}{d_3^2} = \dfrac{f+f_1+f_2+f_3}{\lambda^2}. \end{array} \right.$$

Je ne crois pas que cette dernière relation ait été déjà remarquée.

12. Nous écrirons encore les relations suivantes obtenues par l'application pure et simple des formules de la trigonométrie; il nous sera plus commode de les avoir réunies en un seul tableau

(VI)



$$
\left\{
\begin{array}{ll}
\text{O}\left\{\begin{array}{l}
\rho_1^2 = r_2^2 + r_3^2 - 2 r_2 r_3 \cos(r_2 r_3), \\
\rho_2^2 = r_3^2 + r_1^2 - 2 r_1 r_3 \cos(r_1 r_3), \\
\rho_3^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2 r_1 r_2 \cos(r_1 r_2);
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
r_2^2 r_3^2 = f_1 + r_2^2 r_3^2 \cos^2(r_2 r_3), \\
r_3^2 r_1^2 = f_2 + r_3^2 r_1^2 \cos^2(r_3 r_1), \\
r_1^2 r_2^2 = f_3 + r_1^2 r_2^2 \cos^2(r_1 r_2),
\end{array}\right. \\[2ex]
\text{M}_1\left\{\begin{array}{l}
\rho_1^2 = \rho_2^2 + \rho_3^3 - 2\rho_2 \rho_3 \cos(\rho_2 \rho_3), \\
r_2^2 = \rho_3^2 + r_1^2 - 2\rho_3 r_1 \cos(r_1 \rho_3), \\
r_3^2 = \rho_2^2 + r_1^2 - 2 r_1 \rho_2 \cos(r_1 \rho_2);
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
\rho_2^2 \rho_3^2 = f + \rho_2^2 \rho_3^2 \cos^2(\rho_2 \rho_3), \\
r_1^2 \rho_3^2 = f_3 + r_1^2 \rho_3^2 \cos^2(r_1 \rho_3), \\
r_1^2 \rho_2^2 = f_2 + r_1^2 \rho_2^2 \cos^2(r_1 \rho_2).
\end{array}\right. \\[2ex]
\text{M}_2\left\{\begin{array}{l}
\rho_2^2 = \rho_1^2 + \rho_3^2 - 2\rho_1 \rho_3 \cos(\rho_1 \rho_3), \\
r_3^2 = \rho_1^2 + r_2^2 - 2 r_2 \rho_1 \cos(r_2 \rho_1), \\
r_1^2 = \rho_3^2 + r_2^2 - 2 r_2 \rho_3 \cos(r_2 \rho_3);
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
\rho_1^2 \rho_3^2 = f + \rho_1^2 \rho_3^2 \cos^2(\rho_1 \rho_3), \\
r_2^2 \rho_1^2 = f_1 + r_2^2 \rho_1^2 \cos^2(r_2 \rho_1), \\
r_2^2 \rho_3^2 = f_3 + r_2^2 \rho_3^2 \cos^2(r_2 \rho_3),
\end{array}\right. \\[2ex]
\text{M}_3\left\{\begin{array}{l}
\rho_3^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \rho_2 \cos(\rho_1 \rho_2), \\
r_1^2 = \rho_2^2 + r_3^2 - 2 r_3 \rho_2 \cos(r_3 \rho_2), \\
r_2^2 = \rho_1^2 + r_3^2 - 2 r_3 \rho_1 \cos(r_3 \rho_1),
\end{array}\right. &
\left\{\begin{array}{l}
\rho_1^2 \rho_2^2 = f + \rho_1^2 \rho_2^2 \cos^2(\rho_1 \rho_2), \\
r_3^2 \rho_2^2 = f_2 + r_2^2 \rho_2^2 \cos^2(r_3 \rho_2), \\
r_3^2 \rho_1^2 = f_1 + r_3^2 \rho_1^2 \cos^2(r_3 \rho_1).
\end{array}\right.
\end{array}
\right.
$$

13. Nous terminerons enfin cette nomenclature en donnant l'expression des distances du centre de gravité du tétraèdre à ses quatre sommets.

Soient ξ, η, ζ les coordonnées du centre de gravité G, on a

$$\text{(VII)}\quad\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{x_1+x_2+x_3}{4},\\ \eta &= \frac{y_1+y_2+y_3}{4},\\ \zeta &= \frac{z_1+z_2+z_3}{4}; \end{aligned}\right.$$

et si l'on désigne les distances GO, GM_1, GM_2, GM_3 par R, R_1, R_2, R_3, on trouve aisément

$$\text{(VIII)}\quad\left\{\begin{aligned} 16\mathrm{R}^2 &= r_1^2+r_2^2+r_3^2+2r_1r_2\cos(r_1r_2)+2r_1r_3\cos(r_1r_3)+2r_2r_3\cos(r_2r_3)\\ &= 3(r_1^2+r_2^2+r_3^2)-(\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2),\\ 16\mathrm{R}_1^2 &= r_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2+2r_1\rho_2\cos(r_1\rho_2)+2r_1\rho_3\cos(r_1\rho_3)+2\rho_2\rho_3\cos(\rho_2\rho_3)\\ &= 3(r_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2)-(\rho_1^2+r_2^2+r_3^2),\\ 16\mathrm{R}_2^2 &= \rho_1^2+r_2^2+\rho_3^2+2\rho_1r_2\cos(\rho_1r_2)+2\rho_1\rho_3\cos(\rho_1\rho_3)+2r_2\rho_3\cos(r_2\rho_3)\\ &= 3(\rho_1^2+r_2^2+\rho_3^2)-(r_1^2+\rho_2^2+r_3^2),\\ 16\mathrm{R}_3^2 &= \rho_1^2+\rho_2^2+r_3^2+2\rho_1\rho_2\cos(\rho_1\rho_2)+2\rho_1r_3\cos(\rho_1r_3)+2\rho_2r_3\cos(\rho_2r_3)\\ &= 3(\rho_1^2+\rho_2^2+r_3^2)-(r_1^2+r_2^2+\rho_3^2), \end{aligned}\right.$$

d'où

$$4(\mathrm{R}^2+\mathrm{R}_1^2+\mathrm{R}_2^2+\mathrm{R}_2^3)=r_1^2+r_2^2+r_3^2+\rho_1^2+\rho_2^2+\rho_3^2.$$

§ III. — *Volume maximum ou minimum d'un tétraèdre dont on donne les aires des faces.*

14. Pour résoudre la question énoncée, prenons l'expression du volume sous la forme donnée par la formule (5, § II):

$$(1)\qquad M = \lambda^4 = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

Remarquons que A_{11}, A_{22}, A_{33} sont des quantités données (14, § II), et que A_{12}, A_{13}, A_{23} sont les seules quantités variables; elles sont en outre liées par la relation (16, § II), c'est-à-dire

$$(2)\qquad A_{12} + A_{13} + A_{23} = -c,$$

en désignant par $2c$ la quantité

$$(3)\qquad 2c = f_1 + f_2 + f_3 - f.$$

Si nous regardons A_{23} comme une fonction de A_{12}, A_{13}, nous aurons, pour les conditions de maximum ou minimum,

$$\frac{dM}{dA_{12}} + \frac{dM}{dA_{23}}\frac{dA_{23}}{dA_{12}} = 0,$$

$$\frac{dM}{dA_{13}} + \frac{dM}{dA_{23}}\frac{dA_{23}}{dA_{13}} = 0;$$

mais on a, d'après la relation (2),

$$\frac{dA_{23}}{dA_{12}} + 1 = 0, \qquad \frac{dA_{23}}{dA_{13}} + 1 = 0;$$

ce qui donne définitivement

$$(4)\qquad \frac{dM}{dA_{12}} = \frac{dM}{dA_{13}} = \frac{dM}{dA_{23}}.$$

Or les déterminants M et $\mathfrak{M}$ [équations (5), (7), (8), § II] sont identiques élément à élément et par suite

$$\frac{dM}{dA_{rs}} = \frac{d\mathfrak{M}}{d\alpha_{rs}} = \lambda^2 . a_{rs};$$

les conditions nécessaires pour l'existence du maximum ou du minimum sont donc

$$a_{12} = a_{13} = a_{23};$$

ou, d'après les équations (13, § II),

$$(5)\qquad r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3);$$

à ces relations, il faut joindre la relation (2).

15. Désignons par $\sqrt{\theta}$ la valeur commune des produits (5), $\sqrt{\theta}$ pouvant être précédé du signe $+$ ou $-$; nous aurons ainsi

$$(6)\quad r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) = r_1 r_3 \cos(r_1 r_3) = r_2 r_3 \cos(r_2 r_3) = \sqrt{\theta}.$$

On peut toujours supposer qu'on ait pris pour origine des coordonnées le sommet opposé à la plus petite face, et alors c (équation 3) est une quantité positive.

Je remarque que

$$r_2^2 r_3^2 [1 - \cos^2(r_2 r_3)] = f_1, \ldots;$$

de là nous concluons

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} r_2^2 r_3^2 &= f_1 + \theta, &\text{d'où}\quad r_1^4 &= \frac{(\theta + f_2)(\theta + f_3)}{\theta + f_1}, \\ r_3^2 r_1^2 &= f_2 + \theta, & r_2^4 &= \frac{(\theta + f_3)(\theta + f_1)}{\theta + f_2}, \\ r_1^2 r_2^2 &= f_3 + \theta; & r_3^4 &= \frac{(\theta + f_1)(\theta + f_2)}{\theta + f_3}. \end{aligned}\right.$$

Du groupe (III, § II) nous tirons, eu égard aux valeurs (6),

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} A_{23} &= \sqrt{f_2 f_3}\cos(A_2 A_3) = \theta - r_1^2\sqrt{\theta}, \\ A_{13} &= \sqrt{f_1 f_3}\cos(A_1 A_3) = \theta - r_2^2\sqrt{\theta}, \\ A_{12} &= \sqrt{f_1 f_2}\cos(A_1 A_2) = \theta - r_3^2\sqrt{\theta}; \end{aligned}\right.$$

la relation (2) nous donne alors

$$(9) \qquad r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 = \frac{3\theta + c}{\sqrt{\theta}}.$$

Cette égalité nous montre déjà que $\sqrt{\theta}$ doit être précédé du signe $+$, puisque c et θ sont des quantités positives.

Nous éliminerons r_1, r_2, r_3 en élevant au carré les deux membres de la dernière équation, et, en ayant égard aux valeurs (7), on trouve ainsi

$$(10) \left\{ \begin{aligned} &\theta\left[\frac{(\theta+f_2)(\theta+f_3)}{\theta+f_1} + \frac{(\theta+f_3)(\theta+f_1)}{\theta+f_2} + \frac{(\theta+f_1)(\theta+f_2)}{\theta+f_3}\right. \\ &\qquad\qquad\qquad\left. + 6\theta + 4c + 2f\right] = (3\theta + c)^2. \end{aligned}\right.$$

Telle est l'équation que doit vérifier θ pour que le volume du tétraèdre soit maximum ou minimum. C'est à ce point que Lagrange a conduit la question.

Reste maintenant à savoir quelles sont les racines de l'équation (10) qui conviennent au problème, quel en est le nombre. Le volume devient-il maximum ou minimum? Quelles sont enfin les propriétés géométriques de ces tétraèdres?

C'est principalement en vue de répondre à ces questions que j'ai rédigé ce Mémoire; j'ai dû cependant reprendre d'un peu plus haut les formules relatives aux tétraèdres, afin d'en généraliser le point de départ, et surtout d'en préciser le sens.

Je vais d'abord m'occuper de la discussion des racines de l'équation (10) au point du vue de la question actuelle.

La suite prochainement.