V.-A. LEBESGUE

Arithmologie élémentaire - application à l'algèbre (deuxième article)

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 254-266

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__254_1>

ARITHMOLOGIE ELEMENTAIRE — APPLICATION A L'ALGEBRE

(DEUXIEME ARTICLE);

PAR M. V.-A. LEBESGUE,
Correspondant de l'Institut.

5. On peut prouver d'une autre manière que

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n}$$

est un nombre entier.

On mettra ce nombre sous la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots(m-n)}{1.2.3\ldots m-n}\cdot\frac{(m-n+1\ldots(m-1).m}{1.2\ldots m}$$

et l'on fera voir que tout nombre premier p entre au numérateur plus de fois comme facteur qu'au dénominateur, et comme tous les facteurs premiers du dénominateur entrent aussi au numérateur, il en résultera que le nombre précédent est entier.

On prouve tout à fait de même qu'en posant

$$m = a + b + c\ldots + k$$

l'expression fractionnaire

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b+c+k)}{1.2\ldots a\times 1.2\ldots b\times 1.2\ldots c\times\ldots\times 1.2\ldots k}$$

est un nombre entier.

Cela résulte immédiatement des théorèmes suivants.

Théorème. — *Si l'on pose, en décomposant en facteurs premiers,*

$$\Pi n = 1.2.3\ldots n = 2^{\alpha}\, 3^{\beta}\, 5^{\gamma}\ldots p^{\varpi}\ldots,$$

l'exposant ϖ du nombre premier p sera donné par l'équation

$$\omega = e\left(\frac{n}{p}\right) + e\left(\frac{n}{p^2}\right) = e\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots + e\left(\frac{n}{p^i}\right),$$

$e\left(\frac{n}{p^k}\right)$ représentant l'entier de $\frac{n}{p^k}$ et la valeur de ϖ se terminant quand p^i surpasse n (car alors $e\left(\frac{n}{p^i}\right) = 0$).

Démonstration. — Pour avoir l'exposant de p dans Πn, il suffit de considérer dans ce produit les seuls termes $p, 2p, 3p, \ldots, e\left(\frac{n}{p}\right).p$, dont le produit est

$$p^{e\left(\frac{n}{p}\right)}.1.2.3\ldots e\left(\frac{n}{p}\right).$$

Dans le produit $1.2.3\ldots e\left(\frac{n}{p}\right)$, on ne considérera encore que les termes $p, 2p, 3p, \ldots, e\left(\frac{n}{p^2}\right).p$, dont le produit est

$$p^{e\left(\frac{n}{p^2}\right)}1.2\;3\ldots e\left(\frac{n}{p^2}\right),$$

et ainsi de suite, de sorte qu'on trouvera

$$\varpi = e\left(\frac{n}{p}\right) + e\left(\frac{n}{p^2}\right) + e\left(\frac{n}{p^3}\right) + \ldots + e\left(\frac{n}{p^i}\right)$$

pour l'exposant de la plus haute puissance de p qui divise Πn.

Remarque. — Si l'on fait

$$n = a + bp + cp^2 + \ldots,$$

on a

$$\varpi = \frac{n - (a + b + c \ldots)}{p - 1}.$$

La fraction $\frac{n}{p-1}$ est une limite supérieure qui sert dans certains cas.

Théorème. — *Si l'on suppose*

$$n = a + b + c \ldots, \quad \text{d'où} \quad \frac{n}{p^i} = \frac{a}{p^i} + \frac{b}{p^i} + \frac{c}{p^i},$$

il en résulte

$$e\left(\frac{n}{p^i}\right) \geqq e\left(\frac{a}{p^i}\right) + e\left(\frac{b}{p^i}\right) + e\left(\frac{c}{p^i}\right) + \ldots.$$

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de l'équation

$$\frac{n}{p^i} = \frac{a}{p^i} + \frac{b}{p^i} + \frac{c}{p^i} + \ldots,$$

mise sous la forme

$$e\left(\frac{n}{p^i}\right) + f = e\left(\frac{a}{p^i}\right) + f' + e\left(\frac{b}{p^i}\right) + f'' + e\left(\frac{c}{p^i}\right) + f''' \ldots,$$

où f, f', f'', f''' sont des fractions proprement dites. On a le signe $=$, ou le signe $>$, selon que la somme $f' + f'' + f''' + \ldots$ est inférieure ou non à l'unité.

THÉORÈME. — *L'expression fractionnaire*

$$\frac{1.2.3\ldots(a+b+c\ldots)}{1.2.3\ldots a\times 1.2\ldots b\times 1.2.3\ldots c\times\ldots}$$

est un nombre entier.

Démonstration. — L'exposant du nombre premier est au numérateur $e\left(\frac{n}{p}\right)+e\left(\frac{e}{p^2}\right)+\ldots+e\left(\frac{n}{p^i}\right)$, en supposant $n=a+b+c\ldots$; l'exposant de p au dénominateur est

$$e\left(\frac{a}{p}\right)+e\left(\frac{a}{p^2}\right)+\ldots+e\left(\frac{b}{p}\right)+e\left(\frac{e}{p^2}\right)+\ldots$$
$$+e\left(\frac{c}{p}\right)+e\left(\frac{c}{p^2}\right)+\ldots.$$

Or, d'après le théorème précédent, l'exposant du numérateur surpasse celui du dénominateur.

6. Le produit

$$\Pi n=1.2.3\ldots n$$

est ce que l'on nomme *factorielle* du nombre n. Le produit

$$\mathrm{P}(p)=2.3.5.7.11\ldots p$$

des nombres premiers successifs de 2 à p, nombre premier, est la factorielle du nombre premier p.

Par $\mathrm{P}(n)$, on entendra le produit des nombres premiers *non supérieurs* à n, et par $\mathrm{P}\left(\frac{n}{a}\right)$, $\mathrm{P}\left(\sqrt[k]{\frac{n}{a}}\right)$, ..., le produit des nombres premiers non supérieurs à l'entier de $\frac{n}{a}$, de $\sqrt[k]{\frac{n}{a}}$, ...

Ceci posé, on a la proposition suivante, due à MM. Tchebichew et de Polignac.

Théorème. — *La factorielle* Πn *peut se décomposer comme il suit :*

$$\begin{aligned}\Pi n = {} & P(n).P\left(\frac{n}{2}\right).P\left(\frac{n}{3}\right)\ldots P\left(\frac{n}{i}\right)\ldots\\ & \times P(\sqrt{n}).P\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)P\left(\sqrt{\frac{n}{3}}\right)\ldots P\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right)\ldots\\ & \times P(\sqrt[3]{n}).\;P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{2}}\right).P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{3}}\right)\ldots P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{i}}\right)\ldots\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & \times P(\sqrt[k]{n}).\;P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right).P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right)\ldots P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right)\ldots\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

la quantité entre parenthèses restant égale ou supérieure à 2.

Démonstration. — Si l'on pose, pour abréger,

$$P(\sqrt[k]{n}).P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right).P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right)\ldots = Q_k(n),$$

on a

$$(a) \qquad \Pi n = Q_1.Q_2.Q_3\ldots Q_k\ldots.$$

Il est facile de voir que l'exposant maximum du nombre p, qui n'entre qu'une seule fois dans chaque factorielle $P(\sqrt[k]{n})$, $P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{2}}\right)$, $P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{3}}\right)$,… est l'entier $e\left(\frac{n}{p^k}\right)$. En effet, la dernière factorielle $P\left(\sqrt[k]{\frac{n}{i}}\right)$, qui contient p, doit être telle, qu'on ait

$$\sqrt[k]{\frac{n}{i+1}} < p \leqq \sqrt[k]{\frac{n}{i}},$$

d'où l'on tire

$$n < (i+1).p^k, \quad ip^k \leqq n, \quad i+1 > \frac{n}{p^k} \geqq i,$$

et par conséquent

$$i = e\left(\frac{n}{p^k}\right).$$

L'exposant de p dans le produit

$$Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$$

sera donc

$$e\left(\frac{n}{p}\right) + e\left(\frac{n}{p^2}\right) + e\left(\frac{n}{p^3}\right) \ldots,$$

et comme il en est de même de tout autre facteur premier, il en résulte que le produit $Q_1 Q_2 Q_3 \ldots$ est égal à Πn.

7. Il y a une expression plus commode pour représenter Πn. On fera

$$P_i(n) = P\left(\frac{n}{i}\right) . P\left(\sqrt{\frac{n}{i}}\right) . P\left(\sqrt[3]{\frac{n}{i}}\right) \ldots$$

et il en résultera

$$(b) \qquad \Pi n = P_1(n) . P_2(n) . P_3(n) \ldots .$$

Si l'on prend les logarithmes des deux membres, on a précisément la formule de M. Tchebichew. C'est seulement dans les applications que les logarithmes deviennent utiles. Voici des conséquences de cette formule, dont M. Tchebichew s'est servi pour montrer qu'il y a, en supposant $a > 3$, au moins un nombre premier entre a et $2a - 2$: proposition admise comme *postulatum* par M. Bertrand dans son Mémoire *Sur le nombre de valeurs que peut prendre une fonction quand on permute les lettres qu'elle renferme.*

Quand on a vérifié par les Tables de diviseurs de Burckhardt que le théorème est vrai pour a non supérieur à une certaine limite, on l'établit généralement, comme le fait M. Tchebichew, au moyen de la valeur approchée de

$$\log 1 + \log 2 + \log 3 + \ldots + \log x.$$

Théorème. — *Pour n non inférieur à* 30 *on a*

$$\Pi_1(n) = \frac{\Pi(n).\Pi\left(\frac{n}{30}\right)}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)\cdot\Pi\left(\frac{n}{3}\right)\cdot\Pi\left(\frac{n}{5}\right)}$$

$$= \frac{P_1\left(\frac{n}{1}\right)\cdot P_7\left(\frac{n}{7}\right)\cdot P_{11}\left(\frac{n}{11}\right)\cdot P_{13}\left(\frac{n}{13}\right)\cdot P_{17}\left(\frac{n}{17}\right)\cdot P_{19}\left(\frac{n}{19}\right)\cdot P_{23}\left(\frac{n}{23}\right)\cdot P_{29}\left(\frac{n}{29}\right)\cdot P_{31}\left(\frac{n}{31}\right)\cdots}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)\cdot P_{10}\left(\frac{n}{10}\right)\cdot P_{12}\left(\frac{n}{12}\right)\cdot P_{15}\left(\frac{n}{15}\right)\cdot P_{18}\left(\frac{n}{18}\right)\cdot P_{20}\left(\frac{n}{20}\right)\cdot P_{24}\left(\frac{n}{24}\right)\cdot P_{30}\left(\frac{n}{30}\right)\cdot P_{36}\left(\frac{n}{36}\right)\cdots}$$

$$= \frac{P_1(n)}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)} \times \frac{P_7\left(\frac{n}{7}\right)}{P_{10}\left(\frac{n}{10}\right)} \times \ldots = P_1(n) \times \frac{P_7\left(\frac{n}{7}\right)}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)} \times \ldots.$$

Démonstration. — Pour le voir, il suffit de remplacer $\Pi(n)$, $\Pi\left(\frac{n}{2}\right)$, $\Pi\left(\frac{n}{3}\right)$, $\Pi\left(\frac{n}{5}\right)$, $\Pi\left(\frac{n}{30}\right)$

par leurs valeurs tirées de l'équation (b), puis de supprimer haut et bas les facteurs communs. Au numérateur les diviseurs de n sont les termes des huit formules

$$30k + 1,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,$$

où l'on fait $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Au dénominateur les diviseurs de n sont les termes des huit formules

$$30k + 6,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30,$$

où l'on fait $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Il est à remarquer que dans les suites

$$\begin{array}{cccccccc} 1, & 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, \\ 6, & 10, & 12, & 15, & 18, & 20, & 24, & 30, \end{array}$$

le nombre inférieur surpasse le supérieur correspondant. C'est le contraire dans les suites

$$\begin{array}{cccccccc} 7, & 11, & 13, & 17, & 19, & 23, & 29, & 31, \\ 6, & 10, & 12, & 15, & 18, & 20, & 24, & 30. \end{array}$$

Cette remarque conduit au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Pour n non inférieur à 30 on a*

$$\Pi_1(n) < P_1(n), \quad \Pi_1(n) > \frac{P_1(n)}{P_6\left(\frac{n}{6}\right)}.$$

Démonstration. — Cela résulte de ce que l'on a

$$\frac{P_a\left(\frac{n}{a}\right)}{P_{(a+b)}\left(\frac{n}{a+b}\right)} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{P_{(a+b)}\left(\frac{n}{a+b}\right)}{P_a\left(\frac{n}{a}\right)} < 1.$$

Remarque. — Il est bon de chercher ce qui arrive quand n est inférieur à 30; alors, dans la valeur de $\Pi_1(n)$ on fait $P_n\left(\frac{n}{n}\right)=1$, et quand a surpasse n, on supprime le facteur $P_a\left(\frac{n}{a}\right)$. Dans ce cas, le tableau suivant fait voir que quand les inégalités précédentes ne sont pas satisfaites, elles doivent être remplacées par des égalités, de sorte qu'on peut s'en servir également dans les démonstrations qui suivront.

8. Valeurs des quantités $\Pi(n)$, $P_1(n)$ et $\Pi_1(n)$ pour n non supérieur à 30 :

$\Pi(1)=1$	$P_1(1)=1$	$\Pi_1(1)=1$
$\Pi(2)=2$	$P_1(2)=2$	$\Pi_1(2)=2$
$\Pi(3)=2.3$	$P_1(3)=2.3$	$\Pi_1(3)=2.3$
$\Pi(4)=2^3.3$	$P_1(4)=2^2.3$	$\Pi_1(4)=2^2.3$
$\Pi(5)=2^3.3.5$	$P_1(5)=2^2.3.5$	$\Pi_1(5)=2^2.3.5$
$\Pi(6)=2^4.3^2.5$	$P_1(6)=2^2.3.5$	$\Pi_1(6)=2^2\ 3.5$
$\Pi(7)=2^4.3^2.5.7$	$P_1(7)=2^2.3.5.7$	$\Pi_1(7)=2^2.3.5.7$
$\Pi(8)=2^7.3^2.5.7$	$P_1(8)=2^3.3.5.7$	$\Pi_1(8)=2^3.3.5.7$
$\Pi(9)=2^7.3^4.5.7$	$P_1(9)=2^3.3^2.5.7$	$\Pi_1(9)=2^3.3^2.5.7$
$\Pi(10)=2^8.3^4.5^2.7$	$P_1(10)=2^3.3^2.5.7$	$\Pi_1(10)=2^3.3^2.5.7$
$\Pi(11)=2^8.3^4.5^2.7.11$	$P_1(11)=2^3.3^2.5.7.11$	$\Pi_1(11)=2^3.3^2.5.7.11$
$\Pi(12)=2^{10}.3^5.5^2.7.11$	$P_1(12)=2^3.3^2.5.7.11$	$\Pi_1(12)=2^2.3^2.5.7.11$
$\Pi(13)=2^{10}.3^5.5^2.7.11.13$	$P_1(13)=2^3.3^2.5.7.11.13$	$\Pi_1(13)=2^2.3^2.5.7.11.13$
$\Pi(14)=2^{11}.3^5.5^2.7^2.11.13$	$P_1(14)=2^3.3^2.5.7.11.13$	$\Pi_1(14)=2^3.3^2.5.7.11.13$
$\Pi(15)=2^{11}.3^6.5^3.7^2.11.13$	$P_1(15)=2^3.3^2.5.7.11.13$	$\Pi_1(15)=2^3.3^2.5.7.11.13$
$\Pi(16)=2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13$	$P_1(16)=2^4.3^2.5.7.11.13$	$\Pi_1(16)=2^4.3^2.5.7.11.13$
$\Pi(17)=2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13.17$	$P_1(17)=2^4.3^2.5.7.11.13.17$	$\Pi_1(17)=2^4.3^2.5.7.11.13$
$\Pi(18)=2^{16}.3^8.5^3.7^2.11.13.17$	$P_1(18)=2^4.3^2.5.7.11.13.17$	$\Pi_1(18)=2^4.3.5.7.11.13$
$\Pi(19)=2^{16}.3^8.5^3.7^2.11.13.17.19$	$P_1(19)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$	$\Pi_1(19)=2^4.3.5.7.11.13$
$\Pi(20)=2^{18}.3^8\ 5^4.7^2.11.13.17.19$	$P_1(20)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$	$\Pi_1(20)=2^3.3.5.7.11.13.17.19$
$\Pi(21)=2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19$	$P_1(21)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$	$\Pi_1(21)=2^3.3^2.5.7.11.13.17.19$
$\Pi(22)=2^{19}.3^9.5^4.7^3.11^2.13.17.19$	$P_1(22)=2^4.3^2.5.7.11.13.1.719$	$\Pi_1(22)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19$
$\Pi(23)=2^{19}.3^9.5^4.7^3.11^2.13.17.19.23$	$P_1(23)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23$	$\Pi_1(23)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23$
$\Pi(24)=2^{22}.3^{10}.5^4.7^3.11^2.13.17.19.23$	$P_1(24)=2^4.3^2.5.7.11.13.17.19.23$	$\Pi_1(24)=2^2.3^2.5.7.11.13\ 17.19.23$
$\Pi(25)=2^{22}.3^{10}.5^6.7^3.11^2.13.17.19.23$	$P_1(25)=2^4.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$	$\Pi_1(25)=2^2.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi(26)=2^{23}.3^{10}.5^6.7^3.11^2.13^2.17.19.23$	$P_1(26)=2^4.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$	$\Pi_1(26)=2^3.3^2.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi(27)=2^{23}.3^{13}.5^6.7^3.11^2.13^2.17.19.23$	$P_1(27)=2^4.3^3\ 5^2.7.11.13.17.19.23$	$\Pi_1(27)=2^3.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23$
$\Pi(28)=2^{25}.3^{13}.5^6.7^4.11^2.13^2.17.19.23$	$P_1(28)=2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23$	$\Pi_1(28)=2^4.3^3.5^2.7.11.13.17,19.23$
$\Pi(29)=2^{25}.3^{13}.5^6.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29$	$P_1(29)=2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23.29$	$\Pi_1(29)=2^4.3^3.5^2.7.11.13.17.19.23.29$
$\Pi(30)=2^{26}.3^{14}.5^7.7^4.11^2.13^2.17.19.23.29$	$P_1(30)=2^4.3^3.5.7.11.13.17.19.23.29$	$\Pi_1(30)=2^3.3^2.5.7.11.13.17.19.23.29$

Une conséquence de ces valeurs, c'est qu'on a toujours $\Pi_1(n)$ égal à $P_1(n)$ ou plus petit que $P_1(n)$ jusqu'à $n = 8$ inclusivement.

9. THÉORÈME. — *On a, quel que soit le nombre n,*

$$(c)\qquad \Pi_1(n)\,\Pi_1\left(\frac{n}{6}\right).\Pi_1\left(\frac{n}{6^2}\right)\ldots > P_1(n) > \Pi_1(n),$$

le dernier facteur du premier membre répondant à la plus grande valeur de i qui donne $\frac{n}{6^i}$ *non inférieur à l'unité.*

Démonstration. — C'est une conséquence des inégalités

$$\Pi_1(n) > \frac{P_1(n)}{P_1\left(\frac{n}{6}\right)},\quad \Pi_1\left(\frac{n}{6}\right) > \frac{P_1\left(\frac{n}{6}\right)}{P_1\left(\frac{n}{6^2}\right)},\ldots,$$

multipliées membre à membre, et de ce que, d'après le tableau qui précède, ces inégalités ne peuvent pour $n < 30$ que se réduire à des égalités quand elles ne sont pas satisfaites et que pour $\frac{n}{6^i} < 6$ on a

$$\Pi_1\left(\frac{n}{6^i}\right) = P_1\left(\frac{n}{6^i}\right).$$

Quoique ce procédé semble différer de celui de M. Tchebichew, il revient au même au fond, peut-être est-il plus direct.

Pour passer des limites de $P_1(n)$ à celle de la factorielle $P(n)$ des nombres premiers, on a la proposition suivante :

THÉORÈME. — *On a pour toute valeur de n*

$$(d)\qquad \frac{P_1(n)}{P_1(\sqrt{n})} > P(n) > \frac{P_1(n)}{[P_1(\sqrt{n})]^2}.$$

Démonstration. — Cela suit des équations

$$P_1(n) = P(n).P(\sqrt{n}).P(\sqrt[3]{n}).P(\sqrt[4]{n})\ldots,$$
$$P_1(\sqrt{n}) = P(\sqrt{n}).P(\sqrt[4]{n}).P(\sqrt[6]{n})\ldots,$$

qui donnent

$$\frac{P_1(n)}{P_1(\sqrt{n})} = P(n).P(\sqrt[3]{n}).P(\sqrt[5]{n})\ldots > P(n),$$
$$\frac{P_1(n)}{[P_1(\sqrt{n})]^2} = P(n)\cdot\frac{P(\sqrt[3]{n})}{P(\sqrt{n})}\cdot\frac{P(\sqrt[5]{n})}{P(\sqrt[4]{n})}\cdots < P(n).$$

Il faut bien remarquer que ces inégalités se changent quelquefois en égalités pour de petites valeurs de n.

10. Pour abréger autant que possible ces calculs de limites, on augmente souvent la plus grande et l'on diminue la plus petite. Voici, d'après cela, comment on peut, suivant la méthode de M. Tchebichew, établir qu'il y a des nombres premiers au nombre de k au moins entre n et $n' > n$.

Soit $n' = mn$, le nombre m surpassant l'unité, et représentons par $\varphi(n)$ le logarithme de $P(n)$ ou la somme des logarithmes des nombres premiers non supérieurs à n, cette quantité $\varphi(n)$ n'étant pas connue, mais tombant entre les fonctions $\varphi_0(n) < \varphi(n)$ et $\varphi_1(n) > \varphi(n)$ qui restent les mêmes, quel que soit le nombre n. Si nous admettons que l'on ait $\varphi_0(mn) > \varphi_1(n)$, il en résultera que les quantités

$$\varphi_0(n),\quad \varphi(n),\quad \varphi_1(n);\quad \varphi_0(mn),\quad \varphi(mn),\quad \varphi_1(mn)$$

seront rangées par ordre de grandeur et que

$$\varphi_0(mn) - \varphi_1(n) < \varphi(mn) - \varphi(n),$$
$$\varphi(mn) - \varphi(n) < k \log mn,$$

en admettant qu'il y ait k nombres premiers entre m et mn, conduiront à l'inégalité

$$\varphi_0(mn) - \varphi_1(n) < k \log mn.$$

Par conséquent si l'on avait l'inégalité

$$(e) \qquad \varphi_0(mn) - \varphi_1(n) > k \log mn,$$

il faudrait en conclure qu'il y a plus de k nombres premiers compris entre n et mn.

Pour faire usage de cette inégalité, il faut, au moyen du logarithme de $\Pi(n)$ ou de la somme des logarithmes de 1 à n, déduire, comme le fait M. Tchebichew, des limites du logarithme de $P(n)$, ou de la somme des logarithmes des nombres premiers non supérieurs à n.

Les formules de M. Tchebichew supposent l'inégalité

$$\sqrt{2\pi} . n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n . e^{\frac{1}{12n}} > 1.2.3 \;..n > \sqrt{2\pi} . n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

qui se déduisent d'une formule de M. Liouville, celles que nous donnerons ici se déduisent de la formule plus simple

$$\left(\frac{n}{2}\right)^n > 1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

où e est la base des logarithmes népériens. Cette dernière formule a été démontrée d'une manière simple et ingénieuse par M. Prouhet à la p. 281 du t. XIX de ces Annales.