NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

AD. GUIBERT

Sur quatre nombres en progression arithmétique dont les extrêmes et un moyen sont des carrés

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 249-252

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__249_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

SUR QUATRE NOMBRES EN PROGRESSION ARITHMÉTIQUE DONT LES EXTRÊMES ET UN MOYEN SONT DES CARRÉS;

PAR M. AD. GUIBERT.

Lorsque parmi quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique se trouvent trois carrés, ou deux de ces carrés forment les moyens, ou ils forment les extrêmes. Nous avons déjà considéré le premier cas (*), il s'agit ici du second.

I. — *On obtiendra toute progression arithmétique de quatre termes entiers, telle que* A^2, B^2, C, D^2, *en multipliant par un facteur carré les termes d'une progression de même sorte* a^2, b^2, c, d^2, *lesquels sont impairs, premiers entre eux deux à deux.*

Chaque diviseur commun à A^2 et à B^2 divise C et D^2; donc le plus grand commun diviseur de A^2 et de B^2, qui d'ailleurs est un carré, est le plus grand commun diviseur des quatre termes de la progression; les quotients de leur division par ce nombre constituent évidemment une progression arithmétique a^2, b^2, c, d^2, dans laquelle a^2 et b^2 sont premiers entre eux.

Prouvons que les nombres a^2, b^2, c, d^2 sont tous impairs, premiers entre eux deux à deux.

On a

$$a^2 + c = 2b^2, \quad b^2 + d^2 = 2c;$$

a et c sont donc de même parité, ainsi que b et d.

Or c est impair, car, s'il était pair, b serait impair, et, d'après la seconde égalité, la somme des carrés de deux impairs égalerait un multiple de 4, ce qui est impossible.

(*) *Nouvelles Annales*, juin 1862, p. 213.

a et c sont donc impairs.

La même égalité $b^2 + d^2 = 2c$ prouve que b et d sont impairs.

Les relations précédentes montrent de plus que c est premier avec a et avec b, que d est premier avec b et avec c.

Enfin, r désignant la raison de la progression, comme on a

$$d^2 = a^2 - 3r,$$

il est aisé de conclure, si l'on observe que a et r sont premiers entre eux, que a et d le sont aussi.

II. — *On peut former autant de progressions arithmétiques particulières qu'on voudra, telles que* a^2, b^2, c, d^2.

Toutes ces progressions sont données par la résolution de l'équation indéterminée

$$d^2 = 3b^2 - 2a^2;$$

des méthodes connues conduisent aux formules générales

$$a = 2p^2 - 2pq - q^2, \quad b = 2p^2 + q^2, \quad d = 2p^2 + 4pq - q^2,$$
$$b^2 - a^2 = 4pq(p+q)(2p-q),$$

a, b, d indiquant des nombres absolus, il faut prendre positivement les seconds membres des équations qui donnent a et d; p et q sont deux entiers arbitraires premiers entre eux, l'un positif, l'autre positif ou négatif; q est impair.

Mais, pour que a et b n'aient aucun diviseur commun, il ne suffit pas toujours que p et q soient premiers entre eux, à moins que l'un de ces nombres n'admette le diviseur 3; il faut, en outre, quand aucun d'eux n'est multiple de 3, que les restes de leur division par ce diviseur soient égaux.

En effet, à l'aide du procédé relatif au plus grand commun diviseur algébrique, appliqué aux quantités

$$2p^2 - 3pq - q^2, \quad 2p^2 + q^2,$$

on s'assure que, si elles ont un diviseur commun, ce doit être 3; or, lorsque ni p, ni q n'est multiple de 3, si les restes de leur division par 3 sont égaux, a n'admet point le diviseur 3 : si ces restes sont différents, a et b sont divisibles par 3.

Les formules qui précèdent donnent lieu à trois remarques immédiates :

1° La raison $b^2 - a^2$, toujours multiple de 8, est un multiple de 3 si b n'est pas divisible par 3.

2° b est de l'une des formes $8k + 1$, $8k + 3$.

3° A une progression individuelle a^2, b^2, c, d^2, il en correspond constamment une semblable ayant le même second terme. Chaque solution de l'équation $2p^2 + q^2 = \mathrm{V}$, où V désigne un entier connu, conduira à deux progressions de l'espèce considérée, dont les seconds termes seront égaux.

Exemple :

$$\begin{array}{llllll}
p = 6, & q = 43, & (2293)^2, & (1921)^2, & 2122633, & (745)^2, \\
p = 6, & q = -43, & (1261)^2, & (1921)^2, & 5784361, & (2809)^2, \\
p = 30, & q = 11, & (1019)^2, & (1921)^2, & 6342121, & (2999)^2, \\
p = 30, & q = -11, & (2339)^2, & (1921)^2, & 1909561, & (359)^2.
\end{array}$$

Dans chaque suite, les termes sont premiers entre eux.

III. — *Si la progression a^2, b^2, c, d^2 est obtenue en faisant $q = 1$, en la supposant prolongée, le terme dont le rang est $4p + 3$, sera un carré.*

L'expression générale du $n^{\text{ième}}$ terme de la progression

a^2, b^2, c, d^2, est

$$(2p^2+q^2)^2+4(n-2)pq(p+q)(2p-q);$$

par l'extraction de la racine carrée algébrique, on peut lui donner la forme

$$[2p^2+2(n-2)pq-(n^2-5n+5)q^2]^2$$
$$+(n-1)(n-2)(n-4)[4p-(n-3)q]q^3;$$

ce n^{ieme} terme est donc un carré; lorsque

$$q=1, \quad 4p+3=n.$$

Observons, en terminant, qu'on ne trouverait pas les termes carrés en question, si, prenant φ entier, on posait

$$(4p^2+1)^2+(n-2)r=(2p^2+1+r\varphi)^2,$$

d'où

$$n-2=2(2p^2+1)\varphi+r\varphi^2,$$

ce qui donnerait d'ailleurs, par des valeurs entières de l'arbitraire φ, une infinité de termes carrés, dans la progression dont le second terme est $2p^2+1$. Pour avoir les premiers carrés, il faudra faire

$$\text{soit}\quad \varphi=\frac{1}{2p}, \quad \text{soit}\quad \varphi=\frac{-(4p+1)}{2(p+1)(2p-1)};$$

et, en effet, par chacune de ces valeurs, l'équation

$$n-2=2(2p^2+1)\varphi+r\varphi^2, \quad \text{où} \quad n=4p+3,$$

devient identique.