NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

P.-A.-G. COLOMBIER

Démonstration de la question 104

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 244-246

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__244_1>

DÉMONSTRATION DE LA QUESTION 104

(voir t. VIII, p 236 et 443);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur à Paris.

$f(x) = 0$ est une équation algébrique dont toutes les racines sont réelles et inégales. Démontrer qu'en égalant à zéro la dérivee seconde de

$$[f(x)]^{-1}$$

on obtient une équation dont toutes les racines sont imaginaires. (CATALAN.)

Démonstration. — Pour abréger, nous désignerons

$$f(x) \quad \text{et} \quad [f(x)]^{-1}$$

respectivement par y et Y. Dès lors on a

$$(1) \qquad Yy = 1.$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ toutes les racines de l'équation donnée. On a identiquement

$$(2) \qquad f(x) = (x - a_1)(x - a_2)\ldots(x - a_n);$$

prenons la dérivée première de chacune des équations (1) et (2), il vient :

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{Y'}{Y} &= -\frac{y'}{y}, \\ \frac{y'}{y} &= \sum \frac{1}{x - a_1}, \end{aligned} \right.$$

d'où

$$\frac{Y'}{Y} = -\sum \frac{1}{x - a_1}.$$

Prenons les dérivés des deux membres de cette dernière égalité, on trouve

$$(4) \qquad \frac{YY'' - Y'^2}{Y^2} = \sum \frac{1}{(x - a_1)^2}.$$

Quelle que soit la valeur réelle attribuée à x, la quantité Y est réelle; par suite, Y^2 est toujours positive. De plus, l'équation donnée n'ayant que des racines *réelles*, par hypothèse, il s'ensuit que le second membre de l'équation (4) est positif; donc on a

$$(5) \qquad YY'' - Y'^2 > 0,$$

ou bien, en éliminant Y et Y' au moyen des équations (1) et (3), on peut écrire

$$y^3 Y'' > y'^2;$$

mais l'équation donnée ayant toutes ses racines *réelles et inégales*, par hypothèse, il s'ensuit que l'équation

$$y' = 0$$

a aussi toutes ses racines réelles et inégales, d'après le théorème de Rolle; donc y^2 est toujours positif; par suite, on a

$$y Y'' > 0.$$

Or, y ne peut devenir infini pour aucune valeur finie de x; donc Y'' ne peut devenir nulle pour aucune valeur finie de x, ce qui veut dire en d'autres termes que l'équation

$$Y'' = 0$$

a toutes ses racines imaginaires. C. Q. F. D.

Observation. — Nous laissons au lecteur le soin de trouver l'interprétation géométrique des relations (3) et (5), et de démontrer *à priori* que le polynôme représenté par Y'' est toujours de degré pair, quelle que soit la valeur de n.

Historique. — L'égalité (2) est due à l'algébriste anglais Thomas Harriot. On la trouve dans l'ouvrage posthume de cet auteur ayant pour titre : *Artis analyticæ praxis, ad æquationes algebraicas novâ, expeditâ et generali methodo resolvendas.* Londres, 1631; in-folio.