PAUL SERRET

Démonstration d'un théorème de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 21-22
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__21_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. STEINER;

PAR M. PAUL SERRET.

1. *Lemme.*— Un triangle se mouvant dans l'espace, de manière que ses trois côtés tournent respectivement autour de trois points *donnés*, en ligne droite; et ses deux premiers sommets décrivant deux plans *indéfinis* (ou deux courbes *déterminées* situées dans ces plans) : le sommet *libre* du triangle décrit au troisième plan (on une troisième courbe plane), et les trois plans se coupent suivant une même droite.

Que l'on *projette*, en effet, le triangle mobile, sur un plan quelconque, *par des droites parallèles* à l'intersection des plans décrits par les deux premiers sommets; la projection présentera un triangle mobile, dont les côtés pivotent autour de trois points fixes en ligne droite, et dont les deux premiers sommets glissent sur deux droites fixes, traces des deux plans donnés sur le plan de projection. Mais, dans ces conditions et suivant un théorème connu, le sommet libre du triangle projeté décrit une droite passant par le point de concours de ces deux traces : et le sommet libre du triangle primitif se meut dans un plan qui passe par l'intersection des plans décrits par les deux premiers sommets.

2. THÉORÈME. *Trois cônes, du degré m, ont leurs sommets en ligne droite; et deux de leurs trois courbes d'intersection sont planes : la troisième courbe est plane comme les deux premières; et les plans des trois courbes se coupent suivant une même droite.* (STEINER.)

Imaginons que l'on ait en vue de construire par points l'intersection de deux quelconques des trois cônes donnés : l'on devra, suivant la méthode ordinaire, mener une série de plans auxiliaires par la droite de leurs sommets, et combiner les génératrices des deux cônes, situées dans chacun de ces plans. D'ailleurs, comme les sommets des trois cônes sont ici en ligne droite, les plans auxiliaires, que l'on aura menés en vue de l'une des trois courbes d'intersection, serviront encore pour les deux autres.

Considérons donc l'un de ces plans auxiliaires, menés par la droite des sommets; et, dans ce plan, l'un des triangles ayant pour premier, second et troisième côtés, l'une des génératrices du premier, second et troisième cônes, situées dans ce plan. Faisons ensuite tourner ce plan auxiliaire et le triangle qu'il renferme, autour de la droite des sommets : nous aurons un triangle mobile, dont les sommets décrivent les courbes d'intersection des trois cônes pris deux à deux; et dont les côtés pivotent autour de trois points fixes, les sommets des trois cônes, situés en ligne droite. D'ailleurs, les courbes, décrites par deux des sommets de ce triangle, sont planes, d'après l'hypothèse : la courbe décrite par le troisième sommet est donc plane également, d'après le lemme; et les plans des trois courbes se coupent suivant une même droite.

Remarque. — On peut, à l'aide d'un calcul assez simple, *vérifier* analytiquement la proposition.