NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

J. DE VIRIEU

Solution de la question 79

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 206-213

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__206_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 79;

PAR M. J. DE VIRIEU,
De l'Institution Poncin, a Lyon.

1. Cette question, proposée à la page 454 du t. II, est par erreur numérotée 67, le n° 67 se trouvant à la page 326.

On trouve dans l'*Analyse des infiniment petits* du marquis de l'Hôpital, section XI, exemple III, la question suivante :

« Un voyageur partant du lieu C pour aller au lieu F » doit traverser deux campagnes séparées par la ligne » droite AB; on suppose qu'il parcourt dans la campagne » du côté de C l'espace a dans le temps c, et dans l'autre, » du côté de F, l'espace b dans le même temps c. On de- » mande par quel point E de la droite AB il doit passer » afin qu'il emploie le moins de temps qu'il est possible » pour aller de C en F. »

On propose de déterminer le nombre des solutions et de discuter complétement le problème, le marquis de l'Hôpital s'étant borné à former l'équation.

2. Posons

$$\frac{a}{c} = \alpha, \quad \frac{b}{c} = 6;$$

α et β seront les vitesses respectives du voyageur dans la campagne du côté de C et dans la campagne du côté de F, ou bien les vitesses de départ et d'arrivée. Soient f, g les distances absolues des points F, C à la ligne de séparation; F', C' leurs projections sur cette ligne, et δ la distance mutuelle de ces projections.

Les quantités α, β, f, g sont positives, non nulles, δ est positif ou nul.

3. Prenons pour origine des coordonnées rectangulaires la projection C' du point de départ sur la ligne de séparation, et cette même ligne pour axe des abscisses; supposons de plus que les demi-axes soient choisis de telle sorte qu'aucune des coordonnées du point F ne soit négative.

Si l'on désigne par x l'abscisse d'un point quelconque D de la ligne de séparation, on aura

	Abscisses.	Ordonnees.
C	0	$-g$
F	$+\delta$	$+f$
D	x	0

d'où

$$CD = \sqrt{x^2 + g^2}, \quad DF = \sqrt{(\delta + x)^2 + f^2},$$

et pour l'équation de la droite CF, y', x' représentant les coordonnées courantes,

$$y' + g = \frac{g+f}{\delta},$$

ou

$$y' = \frac{g+f}{\delta}\left(x' - \frac{g}{g+f}\,\delta\right);$$

d'où l'on voit qu'en désignant par G le point où cette droite coupe la ligne de séparation $\frac{g}{g+f}\delta$ est l'abscisse de ce point.

4. Soit T le temps employé pour parcourir la ligne brisée CDF, on a

$$T = \frac{1}{\alpha}\sqrt{x^2+g^2} + \frac{1}{6}\sqrt{(\delta-x)^2+f^2},$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{\alpha}\frac{x}{\sqrt{x^2+g^2}} - \frac{1}{6}\frac{\delta-x}{\sqrt{(\delta-x)^2+f^2}},$$

$$\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{1}{\alpha}\frac{g^2}{(x^2+g^2)\sqrt{x^2+g^2}} + \frac{1}{6}\frac{f^2}{[(\delta-x)^2+f^2]\sqrt{(\delta-x)^2+f^2}}.$$

Pour toutes les valeurs réelles, finies ou nulles de x, les trois fonctions T, $\frac{dT}{dx}$, $\frac{d^2T}{dx^2}$ sont continues et la dernière toujours positive.

La fonction T ne comporte pas de maximum fini et ne peut comporter qu'un seul minimum, qui sera un minimum absolu; ce minimum, s'il existe, correspond à une valeur réelle de x pour laquelle $\frac{dT}{dx}$ s'annule; la forme de cette dernière fonction montre que pour cette valeur de la variable les fonctions x et $\delta - x$ doivent être ou toutes deux nulles ou toutes deux de même signe.

Il en résulte que si T peut être un minimum, la valeur correspondante de x est une des racines réelles de

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{\alpha^2}\frac{x^2}{x^2+g^2} = \frac{1}{6^2}\frac{(\delta-x)^2}{(\delta-x)^2+f^2},$$

pour laquelle les fonctions x, $\delta - x$ sont ou toutes deux nulles ou toutes deux de même signe.

5. Examinons le cas particulier où $\delta = 0$. L'équa-

tion (A) devient

$$\text{(B)} \qquad \frac{1}{\alpha^2}\,\frac{x^2}{x^2+g^2} = \frac{1}{\beta^2}\,\frac{x^2}{x^2+f^2},$$

et les fonctions x, $\delta - x$ se réduisent à $+x$, $-x$, fonctions qui ne peuvent être toutes deux de même signe, mais qui sont toutes deux nulles pour $x = 0$; or $x = 0$ est racine de l'équation (B). Donc T a dans ce cas une valeur minimum correspondant à $x = 0$.

Cette valeur minimum est

$$\frac{g}{\alpha} + \frac{f}{\beta}.$$

Donc lorsque le lieu de départ et le lieu d'arrivée se trouvent sur une même perpendiculaire à la ligne de séparation, pour que le trajet soit le plus court possible, il faut, quelles que soient les vitesses de départ et d'arrivée, que le voyageur suive la droite qui joint le point de départ au point d'arrivée.

6. δ n'étant pas nul, les fonctions x, $\delta - x$ ne peuvent être ni toutes deux nulles, ni toutes deux négatives; elles sont toutes deux positives pour toute valeur de x comprise entre 0 et δ. Il en résulte qu'en posant

$$F(x) = \frac{x^2}{(\delta - x)^2} \cdot \frac{(\delta - x)^2 + f^2}{x^2 + g^2},$$

T ne sera susceptible de minimum qu'autant que l'équation

$$\text{(C)} \qquad F(x) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

aura une racine comprise entre 0 et δ.

7. On a

$$F(x) = \frac{x^2}{(\delta - x)^2} \cdot \frac{(\delta - x)^2 + f^2}{x^2 + g^2},$$

$$\frac{dF(x)}{dx} = 2\,\frac{g^2 x (\delta - x)[(\delta - x)^2 + f^2] + f^2 x^2 (x^2 + g^2)}{(\delta - x)^3 (x^2 + g^2)^2}.$$

$F(x) = 0$, $F(x) = +\infty$, et pour toute valeur de x comprise entre o et δ, $F(x)$ et $\frac{dF(x)}{dx}$ sont continues et positives.

Si donc on fait croître x d'une manière continue de o à δ, $F(x)$ croît d'une manière continue, constamment et indéfiniment à partir de zéro, et passe ainsi par toutes les valeurs positives possibles. Entre o et δ, il existe donc une valeur de x et une seule pour laquelle $F(x) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$. L'équation (C) a une racine et une seule entre o et δ.

8. Si l'on remarque que $F\left(\frac{g}{f+g}\delta\right) = 1$, on formera le tableau suivant :

x croissant de o à $\frac{g}{f+g}\delta$, $F(x)$ positif, plus petit que 1, croît constamment;

$x = \frac{g}{f+g}\delta$, $F(x) = 1$;

x croissant de $\frac{g}{f+g}\delta$ à δ, $F(x)$ positif, plus grand que 1, croît constamment et indéfiniment.

9. Si l'on désigne par ξ l'unique racine de

$$\frac{x^2}{(x - \delta)^2} \cdot \frac{(\delta - x)^2 + f^2}{x^2 + g^2} = \frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

qui soit comprise entre o et δ, on aura

$$\xi \lesseqgtr \frac{g}{f+g}\,\delta \text{ suivant que } \alpha \lesseqgtr \beta;$$

$\frac{g}{f+g}\,\delta$ est d'ailleurs l'abscisse du point G où la droite CF coupe la ligne de séparation.

10. *Résumé.* — Lorsque la droite qui joint les points de départ et d'arrivée est perpendiculaire à la ligne de séparation, c'est une droite que doit suivre le voyageur pour que le trajet soit le plus court possible.

Dans tout autre cas, le point E où le voyageur doit franchir la ligne de séparation est toujours situé entre les projections sur cette ligne des points de départ et d'arrivée, savoir :

Entre la projection du point de départ et le point G..........	vitesse de départ < vitesse d'arrivée.
Au point G lui-même..	vitesse de départ = vitesse d'arrivée.
Entre le point G et la projection du point d'arrivée........	vitesse de départ > vitesse d'arrivée.

Sa distance à la projection du point de départ est l'unique racine de

$$\text{(E)} \qquad \frac{x^2}{(\delta-x)^2}\cdot\frac{(\delta-x)^2+f^2}{x^2+g^2}=\frac{\alpha^2}{\beta^2},$$

qui soit comprise entre o et δ.

11. La ligne de plus court trajet n'est une ligne droite que dans les deux cas suivants :

1° Lorsque les points de départ et d'arrivée sont sur une même perpendiculaire à la ligne de séparation;

2° Quand les vitesses de départ et d'arrivée sont égales.

L'équation E n'ayant qu'une seule racine comprise entre o et δ, cette racine peut, quand les données sont numériques, être obtenue avec toute l'approximation désirable, par la méthode des substitutions successives.

12. Par le point E, déterminé comme il a été dit au n° 10, menons à la ligne de séparation une perpendiculaire indéfinie C_2EF_2, C_2 étant de même côté que C; F_2 de même côté que F par rapport à AB.

Posons

$$C_2EC = \varphi, \quad F_2EF = \omega,$$

on a

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\xi}{g}, \quad \operatorname{tang}\omega = \frac{\delta - \xi}{f},$$

d'où

$$\xi^2 = g^2 \operatorname{tang}^2\varphi, \qquad \xi^2 + g^2 = \frac{g^2}{\cos^2\varphi},$$

$$(\delta - \xi)^2 = f^2 \operatorname{tang}^2\omega, \quad (\delta - \xi)^2 + f^2 = \frac{f^2}{\cos^2\omega}.$$

L'identité

$$\frac{\xi^2[\delta - x)^2 + f^2}{(\delta - \xi)^2(\xi^2 - g^2)} = \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

devient

$$\frac{\left(\frac{g^2 f^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi \cos^2\omega}\right)}{\left(\frac{f^2 g^2 \sin^2\varphi}{\cos^2\varphi \cos^2\omega}\right)} = \frac{\sin^2\varphi}{\sin^2\omega} = \frac{\alpha^2}{\beta^2};$$

les angles aigus ω, φ dépendent de

$$g \operatorname{tang}\varphi + f \operatorname{tang}\omega = \delta, \quad \frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Si l'on adopte le principe de moindre action, l'équation

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\omega} = \frac{\alpha}{\beta}$$

semble exprimer que l'indice de réfraction pour deux milieux différents est égal au rapport des vitesses avec lesquelles la lumière s'y meut.