NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Note sur deux suites récurrentes de cercles et de sphères

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 184-187

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__184_1>

NOTE SUR DEUX SUITES RÉCURRENTES DE CERCLES ET DE SPHÈRES;

PAR M. PAUL SERRET.

1. THÉOREME. — *Étant donnés dans le plan deux cercles fixes intérieurs, on trace un premier cercle quelconque, tangent aux deux cercles fixes; un second cercle tangent au premier et aux deux cercles fixes; un troisième cercle tangent au second et aux deux cercles fixes, et ainsi de suite. Cela posé, si le système de ces cercles se ferme une fois, par un n^{ieme} cercle tangent au $(n-1)^{ième}$ et au premier, il se fermera toujours, et par le même nombre de cercles, quel que soit le cercle initial.* (STEINER.)

Ire Démonstration. — On peut, à l'aide des lemmes suivants, ramener ce théorème à celui de M. Poncelet.

Lemme I. — Le lieu décrit par le centre d'un cercle tangent à deux cercles fixes est une courbe du second degré.

Lemme II. — Le lieu décrit par le point de mutuel contact de deux cercles variables, tangents entre eux et à deux cercles fixes, est un cercle; et la droite des centres des deux cercles variables est tangente au cercle décrit par leur point de contact.

Si, en effet, on applique aux deux cercles fixes la transformation par rayons vecteurs réciproques, on obtient : soit deux cercles fixes concentriques, soit deux droites fixes qui se coupent; et tous les systèmes de deux cercles variables tangents à ces deux cercles, ou à ces deux droites fixes, et tangents entre eux. Mais, dans la figure transformée, le lieu décrit par le point de mutuel contact des deux cercles variables est un cercle dans le premier cas, une droite dans le second; et ce cercle, ou cette droite, coupe *orthogonalement* les cercles variables. Donc, etc.

Revenant maintenant au théorème de M. Steiner, considérons un système *fermé*, composé de n cercles successifs; et le polygone auxiliaire ayant pour premier, second,..., et $n^{\text{ième}}$ sommets, le centre du premier, second,..., et $n^{\text{ième}}$ cercles.

Ce polygone, d'après les lemmes I et II, se trouvera simultanément *inscrit* dans la courbe du second degré, lieu des centres de tous les n cercles; et *circonscrit* au cercle, lieu des points de mutuel contact de tous ces cercles successifs. Le théorème de M. Poncelet est donc applicable; tous les polygones qu'on essayera de former de la même manière se fermeront d'eux-mêmes, par le même nombre de côtés; et, par suite, tous les systèmes de cercles que l'on essayera de former, sous les mêmes conditions que le précédent, se fermeront d'eux-mêmes et par le même nombre de cercles.

II^e Démonstration. — La transformation par rayons vecteurs réciproques appliquée aux cercles fixes donnés, intérieurs, les change en deux cercles *concentriques*, pour lesquels le théorème énoncé devient évident.

Quant à la relation qui doit exister entre les rayons et la distance des centres des deux cercles fixes, pour que la figure se ferme par n cercles et après n' révolutions autour du plus petit de ces deux cercles, on parvient aisément par la même méthode à cette formule

$$\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{n'}{n}\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{\frac{\mathrm{R}.d}{r.\mathrm{D}}},$$

R, r désignant les rayons des deux cercles et D, d les distances de leurs centres au *point central* de ces cercles. Cette formule est sans doute équivalente à celle qui a été donnée par M. Steiner.

2. Théorème. — *Étant données dans l'espace trois sphères fixes, on imagine une première sphère quelconque tangente aux trois sphères fixes; une seconde sphère tangente à la première et aux trois sphères fixes; et ainsi de suite, jusqu'à une $n^{\text{ième}}$ sphère tangente à la $(n-1)^{\text{ième}}$ et aux trois sphères fixes. Cela posé, si le système de ces sphères se ferme une fois, ou si la $n^{\text{ième}}$ sphère se trouve tangente à la première; la même particularité se produira toujours, et par le même nombre de sphères, quelle que soit la sphère initiale.*

La démonstration repose sur le théorème de M. Poncelet, associé aux lemmes suivants :

Lemme I. — Le lieu décrit par le centre d'une sphère tangente à trois sphères fixes est une courbe du second degré (Dupuis, Ch. Dupin).

Lemme II. — Le lieu décrit par le point de mutuel contact de deux sphères variables, tangentes entre elles et à *deux* sphères fixes, est une *sphère;* et la droite des centres des deux sphères variables est tangente à la sphère décrite par leur point de contact.

Même procédé de démonstration que pour le lemme II du numéro précédent.

Lemme III. — Le lieu décrit par le point de mutuel contact de deux sphères variables, tangentes entre elles et à *trois* sphères fixes, est un *cercle*; et la droite des centres des deux sphères variables est tangente au cercle décrit par leur point de contact.

Conséquence du lemme II.

Revenant au théorème énoncé, considérons un système fermé, composé de n sphères, et le polygone plan auxiliaire ayant pour sommets successifs les centres successifs de ces sphères.

Ce polygone, d'après les lemmes I et III, se trouvera simultanément *inscrit* dans la courbe du second degré, lieu des centres de toutes les n sphères, et *circonscrit* au cercle, lieu des points de mutuel contact de toutes ces sphères successives. D'ailleurs, le plan du cercle et celui de la courbe du second degré coïncident, le théorème de M. Poncelet est encore applicable; et tous les polygones qu'on esssayera de former de la même manière se fermeront d'eux-mêmes, ainsi que tous les systèmes de sphères que l'on pourra imaginer sous les mêmes conditions.

Remarque. — M. Steiner a énoncé un théorème analogue par le système des sphères tangentes à *deux* sphères fixes. La question, dans ce cas, ne paraît-elle pas indéterminée?