NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

ABRAHAM SCHNÉE

Solution de la question 614

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 172-174

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__172_1>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SOLUTION DE LA QUESTION 614

(voir p. 126);

PAR M. ABRAHAM SCHNÉE,
Élève du lycée Charlemagne.

Désignons par F le foyer d'une ellipse donnée. En un point quelconque M de cette courbe menons la tangente MT qui coupe le petit axe en T; soit Q la projection du point T sur le rayon vecteur MF: on demande le lieu des points tels que Q, lorsque M décrit l'ellipse donnée.

(MANNHEIM.)

Soient x', y' les coordonnées du point M, on a

$$a^2 y'^2 + b^2 x'^2 = a^2 b^2. \tag{1}$$

L'équation de la tangente en ce point est

$$a^2 yy' + b^2 xx' = a^2 b^2,$$

qui, pour $x = 0$, donne $y = \frac{b^2}{y'}$, coordonnées du point T.

L'équation de la droite TQ est alors

$$(2) \qquad xx' + yy' = b^2 + cx,$$

et celle de FM

$$(3) \qquad yx' + (c - x)\,y' = cy.$$

Des équations (2) et (3), on tire

$$x' = c - b^2 \frac{c - x}{y^2 - cx + x^2}, \quad y' = \frac{b^2 y}{y^2 - cx + x^2}.$$

En portant dans l'équation (1), supprimant le facteur commun b^2 et développant les carrés, on a

$$\frac{a^2 b^2 y^2}{(y^2 - cx + x^2)^2} + c^2 + \frac{b^4 (c - x)^2}{(y^2 - cx + x^2)^2} - 2 b^2 c \frac{c - x}{y^2 - cx + x^2} = a^2.$$

Je fais passer c^2 dans le second membre qui devient alors égal à b^2, lequel est facteur commun. Je le supprime, je chasse le dénominateur et fais tout passer dans le second membre

$$(y - cx + x^2) - 2c\,(x - c)\,(y^2 - cx + x^2)$$
$$- a^2 y^2 - b^2 (x - c)^2 = 0.$$

Résolvons par rapport à $y^2 - cx + x^2$,

$$y^2 - cx + x^2 = c\,(x - c) \pm \sqrt{c^2\,(x - c)^2 + a^2 y^2 + b^2 (x - c)^2}.$$

Sous le radical, $(x - c)^2$ est facteur de $b^2 + c^2$, c'est-à-dire de a^2 que je fais alors sortir,

$$y^2 - cx + x^2 = c(x - c) \pm a \sqrt{(x - c)^2 + y^2}.$$

Isolons le radical

$$(x - c)^2 + y^2 = \pm a \sqrt{(x - c)^2 + y^2},$$

et élevons au carré

$$[(x-c)^2+y^2]^2=a^2[(x-c^2)+y^2]$$

ou

$$[(x-c)^2+y^2][(x-c)^2+y^2-a^2]=0,$$

qui se dédouble en

$$(x-c)^2+y^2=0,$$
$$(x-c)^2+y^2=a^2.$$

La première de ces équations donne

$$x=c,\quad y=0,$$

c'est le foyer, solution évidemment étrangère, et la seconde représente un cercle de rayon a, demi grand axe, ayant pour centre le foyer.