J. MENTION

Démonstration d’un théorème de M. Steiner

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 16-20

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__16_0>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE M. STEINER;

PAR M. J. MENTION.

Les derniers volumes des *Annales de Gergonne* renferment plusieurs théorèmes très-beaux, énoncés sans démonstration par M. Steiner. Il me semble qu'ils sont encore, presque tous, à démontrer. J'extrairai le suivant du t. XVIII, p. 302 : « Dans chacun des quatre triangles » formés par les côtés d'un quadrilatère, il y a un cercle » inscrit et trois cercles ex-inscrits; ce qui fait en tout » seize cercles, dont les centres sont quatre à quatre sur » une circonférence, de manière à donner naissance à » huit nouveaux cercles. Ces huit nouveaux cercles se » partagent en groupes, tels que chacun des quatre cercles » de l'un de ces groupes coupe orthogonalement tous les » cercles de l'autre groupe; on en conclut que les centres » des cercles des deux groupes sont sur deux droites per- » pendiculaires l'une à l'autre. Enfin ces deux dernières » droites se coupent au point de rencontre des cercles » circonscrits aux quatre triangles. »

La propriété relative au point d'intersection des lignes de centres fera l'objet de cette Note, le reste n'offrant aucune difficulté.

I.

L'occasion se présente ici de revenir sur quelques théorèmes de géométrie, d'où la proposition actuelle découle naturellement.

Pour éviter de très-longues périphrases j'appellerai : 1° *cercle des hauteurs* d'un triangle, le cercle ayant pour centre le point de rencontre de celles-ci et un rayon moyen proportionnel entre les segments dans lesquels chaque hauteur est divisée au centre même; 2° *ligne des hauteurs* d'un quadrilatère, la droite passant par les points de rencontre des hauteurs dans les quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère; 3° *triangle diagonal*, le triangle formé par les trois diagonales.

On se souviendra que les circonférences, décrites sur les diagonales d'un quadrilatère comme diamètres, ont pour axe radical la ligne des hauteurs; la médiane étant d'ailleurs un axe radical commun aux cercles de hauteurs des triangles du quadrilatère. La ligne des hauteurs contient aussi le centre du cercle circonscrit au triangle diagonal. Si les circonférences de la première série, c'est-à-dire celles décrites sur les diagonales, ne se coupent pas, les circonférences de la seconde couperont la médiane en deux *points-limites*, qui sont les centres de deux hyperboles équilatères tangentes aux côtés du quadrilatère.

Un théorème, déjà démontré directement, comporte cet énoncé plus complet et plus instructif :

« Les cinq médianes des quadrilatères qu'on peut
» construire avec les côtés d'un pentagone se coupent en
» un même point, centre radical commun aux quinze
» cercles suivants, savoir : les dix cercles de hauteurs et
» les cinq circonscrits aux triangles diagonaux. »

Car les quadrilatères ayant, deux à deux, un triangle en commun, le point de concours de deux médianes quelconques sera de commune puissance par rapport aux sept circonférences de hauteurs différentes, dans les deux quadrilatères correspondants. Or, parmi les sept centres de circonférences, quatre au moins appartiendront à une même droite qui sera la ligne des hauteurs d'un troisième quadrilatère. Donc la médiane de celui-ci passera par le point de commune puissance.

Il est à remarquer que, d'après le beau théorème de M. Faure, on constatait l'existence du centre radical commun aux cinq cercles déterminés par les points de concours respectifs des diverses diagonales.

II.

Théorème. — *Les bissectrices des angles d'un quadrilatère complet fournissent douze points de rencontre, en ne combinant que celles qui partent de sommets opposés : les points de rencontre des bissectrices internes et ceux des bissectrices externes, d'une part ; les points appartenant à la fois aux bissectrices internes et externes, d'autre part ;*

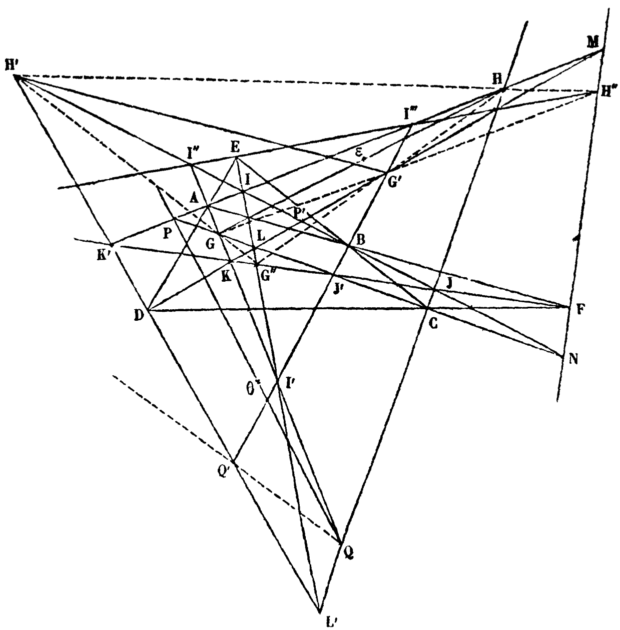
1° *Deux points internes sont en ligne droite avec le troisième externe, ainsi que les trois externes.*

2° *Trois points internes-externes, choisis de manière que trois bissectrices similaires n'aboutissent point à des sommets situés sur un même côté, sont également en ligne droite.*

Je vais démontrer, par exemple, que les points de concours G, G′ des bissectrices internes issues des sommets A, C, B, D, et le point H″ des bissectrices externes issues des sommets E, F, sont en ligne droite. Considérons le triangle I′ I″ I‴ ayant pour côtés les bissectrices externes du triangle ABE, et celui qui aura pour côtés les bissectrices DL, CN, FM (*fig.* 1). Leurs sommets se trouvent évidemment deux à deux, sur trois droites NI″, MI‴, LI′ concourent en un même point I; donc, en vertu d'un théorème bien connu, les points d'intersection (I″I‴, MN), (I″I′, ML), (I′I‴, ML) seront en ligne droite. c. q. f. d.

La démonstration est tout à fait analogue pour les autres points de rencontre indiqués. On ne les représente pas tous sur la figure, qui, pour être complète, exigerait un cadre plus large que celui du présent recueil.

Fig. 1.



Il résulte de là que les douze points se partagent en deux groupes qui sont les sommets de quadrilatères complets. Le théorème s'applique au quadrilatère sphérique, et la démonstration précédente ne subit aucun changement.

III.

Théorème. — *Les deux quadrilatères ayant pour sommets les points de rencontre des bissectrices opposées internes ou externes, et les points de rencontre internes* *externes, sont tels, que la médiane de l'un coïncide avec la ligne des hauteurs de l'autre.*

Soit IJL′K′ (*fig.* 1) le quadrilatère inscriptible formé par les intersections consécutives des bissectrices externes; LII′ et J′KK′ seront les bissectrices internes des angles E et F. En se rappelant que les hauteurs du triangle diagonal d'un quadrilatère inscrit au cercle se coupent précisément au centre de ce cercle, on observe que le cercle passant par les points I, J, L′, K′ a son centre au point de rencontre des hauteurs du triangle G″HH′; de même pour les cercles LJ′KI′,.... Donc la ligne des hauteurs du quadrilatère GG′HH′H″G″ est aussi la ligne des centres du premier groupe de cercles définis dans l'énoncé de M. Steiner. Pour des motifs tout semblables, la ligne des hauteurs du quadrilatère aux rencontres internes-externes est la ligne des centres du second groupe de cercles.

Remarquons maintenant que les circonférences décrites sur les diagonales comme diamètres, dans les deux quadrilatères actuels, viennent se joindre aux deux groupes de cercles IJL′K′,..., qui en sont *les cercles de hauteurs.* Donc la ligne des hauteurs de l'un est la médiane de l'autre, et réciproquement.

Les deux groupes constituent dès lors une double série de cercles orthogonaux; ce que j'ai annoncé être susceptible de preuve à priori et très-facilement.

Avant de poursuivre mes investigations, je récapitulerai ainsi les déductions acquises : Les deux quadrilatères de bissectrices jouissent de la même double série de cercles orthogonaux, et chaque série admet huit cercles différents, puisque aux cercles de M. Steiner s'ajoutent, de chaque côté, les trois cercles décrits sur les diagonales et le cercle circonscrit au triangle diagonal.

(*La fin prochainement.*)