J.-CH. DUPAIN

Solution de la question 313

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 163-169

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__163_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 313

(voir t. XIV, p. 305);

PAR M. J.-CH. DUPAIN.
Professeur au lycée de Nîmes.

Nous prions le lecteur de construire lui-même la figure. Nous plaçons l'origine des coordonnées au milieu de notre feuille de papier, l'axe des x se dirige vers la droite, l'axe des y vers le bas de la page et l'axe des z s'élève perpendiculairement au papier.

L'équation proposée

$$e^z = \frac{\cos x}{\cos y}$$

peut se mettre sous d'autres formes utiles à considérer :

$$e^z = \frac{\text{séc}\, y}{\text{séc}\, x}, \quad z = \mathrm{l}.\cos x - \mathrm{l}.\cos y, \quad z = \mathrm{l}.\text{séc}\, y - \mathrm{l}.\text{séc}\, x.$$

Les dérivées partielles de z sont

$$\frac{dz}{dx} = -\operatorname{tang} x, \qquad \frac{dz}{dy} = \operatorname{tang} y,$$

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = -\text{séc}^2 x, \qquad \frac{d^2 z}{dx\,dy} = 0, \qquad \frac{d^2 z}{dy^2} = \text{séc}^2 y,$$

$$\frac{d^3 z}{dx^3} = -2 \operatorname{tang} x\, \text{séc}^2 x, \qquad \frac{d^3 z}{dx^2\,dy} = 0, \qquad \frac{d^3 z}{dx\,dy^2} = 0,$$

$$\frac{d^3 z}{dy^3} = 2 \operatorname{tang} y\, \text{séc}^2 y.$$

Le rayon de courbure des sections normales principales a pour expression

$$R = \pm \frac{1 + \operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang}^2 y}{\operatorname{séc} x . \operatorname{séc} y},$$

et il est remarquable que ces deux valeurs sont numériquement égales et de signes contraires.

L'équation ne change pas quand on remplace x par $-x$ ou y par $-y$; la surface est donc symétrique par rapport aux plans zOx, zOy.

L'équation ne change pas non plus quand on ajoute aux coordonnées x, y des multiples de π pairs tous les deux ou tous les deux impairs; on peut donc, en déplaçant parallèlement les plans zOx, zOy, transporter l'origine en une infinité de points ayant pour coordonnées des multiples de π (pairs ou impairs tous les deux). Les nouveaux plans coordonnés sont encore des plans de symétrie, de sorte que la surface est symétrique par rapport à une infinité de plans parallèles à deux directions rectangulaires, la distance constante de deux plans consécutifs étant π.

Traçons sur le plan xOy, que j'appellerai *horizontal*, des parallèles à Oy par les points dont les abscisses sont des multiples impairs de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$; traçons aussi des parallèles à Ox par les points dont l'y est un multiple impair de $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Ces deux systèmes de parallèles détermineront des carrés disposés comme les cases d'un damier, et que je supposerai, comme celles-ci, alternativement blancs et noirs, le carré qui contient l'origine étant censé blanc.

Je dis d'abord que pour tous les points situés dans un carré *noir* l'ordonnée de la surface est imaginaire, car pour tous ces points $\cos x$ et $\cos y$ sont de signes contraires, et le rapport $\frac{\cos x}{\cos y}$ étant négatif n'a pas de logarithme réel.

Pour tous les points situés dans un carré *blanc*, l'ordonnée est réelle, et la surface est ainsi formée d'une infinité de nappes identiques entre elles et rattachées les unes aux autres par des droites communes. Ces droites sont les parallèles menées à l'axe Oz par les sommets des différents carrés. En effet, l'x et l'y de ces sommets étant des multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ et $\cos y$ y sont nuls, et

$e^z = \frac{0}{0}$.

L'ordonnée de la surface est nulle quand $\cos x = \cos y$; on a alors

$$x = \pm y \pm 2n\pi.$$

Le lieu des points ainsi définis se compose de deux séries de droites, parallèles aux bissectrices des angles formés par Ox et Oy, et dont les ordonnées à l'origine sont des multiples pairs de π. Ces droites sont précisément les diagonales des carrés *blancs*. Elles partagent chacun de ces carrés en quatre triangles isocèles rectangles, deux à droite, deux à gauche et deux vers le haut et le bas de la page; dans ces derniers, l'ordonnée de la surface est positive; elle est négative dans les deux autres.

Sections horizontales.— Pour fixer les idées, coupons la surface par un plan horizontal ayant pour ordonnée 0,69315 = l.2; la section de la surface par ce plan étant projetée horizontalement, aura pour équation

$$e^{l2} = \frac{\cos x}{\cos y}$$

ou

$$\cos x = 2\cos y, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{2\sin y}.$$

Cette courbe a une infinité de centres, d'axes et de branches. Je considérerai l'une d'elles en particulier. Pour $x = 0$, on a

$$\cos y = \frac{1}{2},$$

et l'on peut prendre

$$y = \frac{\pi}{3}.$$

La tangente est parallèle aux x; quand x augmente, y augmente. Pour $x = \frac{\pi}{2}$,

$$y = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2};$$

l'y continue à augmenter jusqu'à un maximum $y = \frac{2}{3}\pi$ qui correspond à $x = \pi$; y diminue ensuite. Pour $x = \frac{3\pi}{2}$,

$$y = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $x = 2\pi$,

$$y = \frac{\pi}{3}.$$

A partir de là y repasse périodiquement par les mêmes valeurs.

On aurait pu pour $x = 0$ prendre $y = \frac{5\pi}{3}$. On obtiendrait ainsi une seconde branche symétrique de la première par rapport à la droite ($y = \pi$). En adoptant pour valeur initiale de y $\frac{7\pi}{3}$, on trouvera une troisième branche symétrique de la seconde par rapport à la droite $(y = 2\pi)$, et ainsi de suite indéfiniment. Toutes ces branches affectent les allures d'une sinusoïde.

A mesure que le plan sécant s'élève au-dessus du plan xOy, ces différentes branches de courbes *s'aplatissent*, c'est-à-dire se rapprochent des droites autour desquelles elles ondulent.

Si l'ordonnée du plan sécant devient négative, les différentes branches de la section conservent leurs grandeurs et leurs positions respectives, mais la figure entière effectue un quart de révolution autour du point O.

Sections verticales. — Prenons un plan sécant parallèle à zOx et dont l'y soit a. La section a pour équation

$$z = \mathrm{l.}\cos x - \mathrm{l.}\cos a, \quad \frac{dz}{dx} = -\operatorname{tang} x.$$

L'ordonnée à l'origine est $-\mathrm{l.}\cos a$, la tangente à l'origine est horizontale. Quand x augmente de o à $\frac{\pi}{2}$, l'ordonnée diminue en valeur algébrique; elle est nulle pour $x = a$ et négative quand x est compris entre a et $\frac{\pi}{2}$. Le coefficient angulaire de la tangente reste négatif et augmente en valeur numérique jusqu'à l'infini. La droite $x = \frac{\pi}{2}$ est une asymptote.

On trouve ensuite une seconde branche symétrique de la première par rapport à la droite $x = \pi$, puis une nouvelle branche symétrique de la seconde par rapport à la droite $x = 2\pi$, et ainsi de suite indéfiniment, les axes de symétrie ayant pour abscisses les multiples de π.

Il est à remarquer que ces différentes sections sont égales entre elles, que l'ordonnée z ne varie de l'une à l'autre que d'une quantité constante, et qu'enfin on peut les regarder comme les positions successives d'une génératrice invariable de forme qui se déplacerait parallèlement à elle-même.

Les sections parallèles à zOy ne diffèrent des précédentes que par le changement de signe de l'ordonnée z.

Les sections parallèles à zOx et zOy sont donc disposées entre elles comme les sections paraboliques parallèles aux plans principaux du paraboloïde hyperbolique, et la surface peut être engendrée par la courbe $z = \mathrm{l}.\cos x$ glissant parallèlement à elle-même sur une seconde courbe, $z = -\mathrm{l}.\cos y$, égale, ayant même sommet, l'ouverture en sens contraire et placée dans un plan perpendiculaire.

Le paraboloïde osculateur à l'origine a pour équation

$$2z = y^2 - x^2,$$

$$\frac{dz}{dx} = -x, \quad \frac{dz}{dy} = y, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = -1, \quad \frac{d^2z}{dy^2} = 1, \quad \frac{d^2z}{dx\,dy} = 0.$$

Les dérivées partielles des ordres suivants sont nulles. A l'origine $x = 0$, $y = 0$, les dérivées partielles des *trois* premiers ordres sont les mêmes pour la surface et le paraboloïde, qui ont ainsi un contact du troisième ordre.

Lignes de pente. — L'équation différentielle de la projection horizontale des lignes de pente est

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) dy - \left(\frac{dz}{dy}\right) dx = 0.$$

Pour la surface que nous étudions, elle devient

$$\tang x . dy + \tang y . dx = 0,$$

et, en intégrant,

$$\sin x . \sin y = \text{constante}.$$

Quand la constante est nulle, on a

$$\sin x = 0 \quad \text{ou} \quad \sin y = 0;$$

par suite

$$x = n\pi \quad \text{ou} \quad y = n\pi.$$

Les projections des lignes de pente sont des parallèles aux axes Ox, Oy passant par les centres des carrés *blancs*.

Quand la constante est l'unité, les projections des lignes de pente se réduisent à un système de points isolés ayant pour coordonnées les multiples impairs de $\frac{\pi}{2}$.

La constante peut se représenter en général par $\sin^2\alpha$; l'équation de la projection des lignes de pente devient

$$\sin x \sin y = \sin^2\alpha;$$

elle représente une infinité de branches de courbes fermées ayant pour centres les sommets des carrés et pour axes de symétrie et pour normales les côtés et les diagonales des carrés. Il est à remarquer que la moitié seulement de chaque branche correspond à une ligne de pente, les deux quarts se trouvant sur des carrés *noirs*.