Nouvelles annales de mathématiques

Richard

Solution de la question 609

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 159-160

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__159_0>

SOLUTION DE LA QUESTION 609

(voir p. 31);

PAR M. RICHARD,
Elève du lycée de Douai.

Soient MF $= c$ et soient x_1, y_1 les coordonnées du point R, on a

$$\text{Equation de F}f\ldots\quad y = -\frac{x_1 - c}{y_1}(x + c),$$

$$\text{Equation de F}'f'\ldots\quad y = -\frac{x_1 + c}{y_1}(x - c).$$

Les coordonnées de H sont x_1 et $\frac{c^2 - x_1^2}{y_1}$. Remarquant que le quadrilatère FF$'ff'$ est inscriptible, la hauteur RH est la polaire du point C; donc l'abscisse du point C est $\frac{c^2}{x_1}$ dont l'équation du cercle passant par les trois points R, H, C est

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_1^2 + \frac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} & 1 \\ \frac{c^4}{x_1^2} & \frac{c^2}{x_1} & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La longueur de la tangente MT menée par l'origine sera

$$\begin{vmatrix} x_1^2 + y_1^2 & x_1 & y_1 \\ x_1^2 + \frac{(c_2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1 & \frac{c^2 - x_1^2}{y_1} \\ \frac{c^4}{x_1^2} & \frac{c^2}{x^2} & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_1 & \frac{c^2 - x_1}{y_1} & 1 \\ \frac{c^2}{x_1} & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Faisant sortir c^2 du numérateur, multipliant les deux déterminants par x_1 et y_1, et retranchant la seconde colonne de la première dans le premier déterminant, on a

$$\delta^2 = -c^2 \begin{vmatrix} y_1^2 & x_1^2 & y_1^2 \\ \dfrac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1^2 & c^2 - x_1^2 \\ \dfrac{c^2 - x_1^2}{x_1^2} & 1 & 0 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & 1 \\ x_1^2 & c^2 - x_1^2 & 1 \\ c^2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Or le second déterminant, en retranchant la seconde ligne de la première, donne en développant

$$-(x_1^2 + y_1^2 - c^2)(x_1^2 - c^2).$$

Effectuant la même opération sur le second déterminant, on a

$$(x_1^2 + y_1^2 - c^2) \begin{vmatrix} \dfrac{y_1^2 + c^2 - x_1^2}{y_1^2} & 0 & 1 \\ \dfrac{(c^2 - x_1^2)^2}{y_1^2} & x_1^2 & c^2 \\ \dfrac{c^2 - x_1^2}{x_1^2} & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 - c^2) \left[\begin{array}{c} \dfrac{(y_1^2 + c^2 - x_1^2)(x_1^2 - c^2)}{y_1^2} \\ + (c^2 - x_1^2)\left(\dfrac{c^2 - x_1^2}{y_1^2} - 1\right) \end{array} \right]$$

$$= (x_1^2 + y_1^2 - c^2)(x_1^2 - c^2) \left[\frac{y_1^2 + c^2 - x_1^2 - c^2 + x_1^2 + y_1^2}{y_1^2} \right]$$

$$= 2(x_1^2 - c^2)(x_1^2 + y_1^2 - c^2).$$

Divisant, on a

$$\delta^2 - 2c^2, \quad \delta = c\sqrt{2},$$

quantité constante. C. Q. F. D.