Nouvelles annales de mathématiques

Finck

Sur la stabilité du mouvement de rotation d'un corps autour d'un axe principal

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 146-147

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__146_1>

SUR LA STABILITÉ DU MOUVEMENT DE ROTATION
d'un corps autour d'un axe principal;

PAR M. FINCK.

On peut donner à cette question plus de précision de la manière suivante : Avec les notations ordinaires, l'équation du cône que décrit l'axe instantané dans le corps est, par rapport aux axes principaux,

$$(1)\quad A(Ah-k^2)x_1^2+B(Bh-k^2)y_1^2+C(Ch-k^2)z_1^2=0.$$

Les valeurs initiales de p, q, r étant p_0, q_0, r_0, on a

$$(2)\quad \begin{cases} Ah-k^2=(A-B)Bq_0^2+(A-C)Cr_0^2, \\ Bh-k^2=(B-A)Ap_0^2+(B-C)Cr_0^2, \\ Ch-k^2=(C-B)Bq_0^2+(C-A)Ap_0^2. \end{cases}$$

Je suppose un corps tournant autour de Ox_1 (O désigne le point fixe); je lui applique un couple d'impulsion très-petit. p subira un changement très-petit; q, r

qui étaient nulles, prendront de petites valeurs; je designe par p_0, q_0, r_0 les valeurs de p, q, r initiales pour ce nouvel état. D'ailleurs je suppose $A > B > C$; il s'ensuit que $Ah - k^2 > 0$; $Bh - k^2$ peut être supposé < 0, car r_0^2 étant très-petit, tandis que p_0^2 ne l'est pas, on peut admettre que $(A - B) Ap_0^2 > (B - C) Cr_0^2$; il suffit de de donner pour cela au couple perturbateur une valeur convenable. Le cône elliptique (1) est donc décrit autour de Ox_1; les angles au centre de ses sections principales étant nommés α et β, on a

$$\tang^2\alpha = \frac{A(Ah - k^2)}{B(k^2 - Bh)} = \frac{A}{B} \cdot \frac{(A - B)Bq_0^2 + (A - C)Cr_0^2}{(A - B)Ap_0^2 - (B - C)Cr_0^2},$$

$$\tang^2\beta = \frac{A}{C} \cdot \frac{(A - B)Bq_0^2 + (A - C)Cr_0^2}{(A - C)Ap_0^2 + (B - C)Cr_0^2}.$$

On peut supposer q_0, r_0 assez petits par rapport à p_0 pour que ces angles soient aussi petits qu'on veut. Le mouvement est donc stable autour de Ox_1; de même autour de Oz_1.

Mais si le corps tourne autour de Oy_1 et qu'il survienne une perturbation qui rende $Bh - k^2 \gtrless 0$, l'axe instantané décrira le cône (1) qui enveloppe l'axe z_1 ou l'axe x_1. Le mouvement autour de Oy_1 n'est donc pas stable, sauf le cas particulier où $Bh - k^2 = 0$.

Dans le cas où $A = B$, le cône (1) est de révolution autour de Oz_1. Le mouvement est stable autour de Oz_1; il ne l'est pas autour de Ox_1. Car si le corps tourne autour de Oz_1 ou de Ox_1, une perturbation quelconque fera décrire à l'axe instantané le cône (1) dont l'angle au centre a pour tangente $\frac{z_0}{\sqrt{p_0^2 + q_0^2}}$, de sorte que si p_0, q_0 sont petits par rapport à r_0, cet angle est très-petit. Dans aucun cas l'axe instantané ne restera très-rapproché de Ox_1.
