NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

FINCK

Note sur les solutions singulières en mécanique

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 139-146

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__139_1>

NOTE SUR LES SOLUTIONS SINGULIÈRES EN MECANIQUE;

Par M. FINCK,
Professeur au lycée de Strasbourg.

C'est une remarque faite depuis longtemps, que dans les problèmes de mécanique les solutions singulières des équations différentielles peuvent être significatives. Je me propose de faire ressortir ici quelques questions qui présentent cela de commun, que dans certains cas particuliers l'intégrale générale devient absurde (*), tandis que la solution singulière est possible et résout la question.

Le mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère, autrement dit le mouvement du pendule à oscillations coniques conduit à l'équation

$$\frac{a}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{dz}{dt} = \pm \sqrt{-z^3 - kz^2 + a^2 z + a^2 k - \frac{c^2}{2g}}.$$

a est le rayon de la sphère;

g la gravité;

z la distance du mobile au plan horizontal mené par le centre de la sphère, z positif est dirigé de haut en bas;

$2gk$ la constante introduite par l'intégration relative à la force vive, c'est-à-dire que $2gk = v_0^2 - 2gz_0$; v_0, z_0 valeurs initiales de v et z;

cdt est la valeur constante de $xdy - ydx$.

Je pose

$$f(z) = z^3 + kz^2 - a^2 z - a^2 k + \frac{c^2}{2g}.$$

Cette fonction a des racines égales ou non. Si les trois racines étaient égales, elles seraient négatives, car

$$f(-a) = \frac{c^2}{2g} \quad \text{et} \quad f(-\infty) = -\infty.$$

Or cela ne se peut pas, vu que du premier au troisième terme il y a une variation.

S'il y a deux racines égales, elles sont positives, car les trois racines ne sauraient être négatives, et si elles sont réelles toutes, comme il y a une variation au moins, il y aurait une racine positive; donc entre $-a$ et $-\infty$ il n'y en a qu'une de négative.

(*) Absurde, non, mais seulement analytiquement vrai et non physiquement exécutable, comme cela arrive encore pour d'autres problèmes. Tm.

Soit α la racine positive double, $-\beta$ la racine négative; il vient

$$\frac{a}{\sqrt{2g}}\cdot\frac{dz}{dt}=(z-\alpha)\sqrt{-(z+\beta)}; \tag{1}$$

l'intégrale générale de cette équation ne donne que des valeurs imaginaires de t pour des valeurs réelles de z, sauf exception.

Car en posant,

$$z_1+\beta=u^2,$$

on en tire

$$\frac{1}{a}\,dt\sqrt{2g}\sqrt{-1}=\frac{2\,du}{u^2-\alpha-\beta}.$$

Soit

$$\alpha+\beta=\gamma^2;$$

de là

$$\frac{\sqrt{-2g}}{a}=\frac{1}{\gamma}\log\frac{(u+\gamma)(u_0-\gamma)}{(u-\gamma)(u_0+\gamma)},$$

u_0 valeur initiale de u.

Ensuite

$$\frac{(u+\gamma)(u_0-\gamma)}{(u-\gamma)(u_0+\gamma)}=\cos t\,\frac{\gamma\sqrt{2g}}{a}+\sqrt{-1}\sin t\,\frac{\sqrt{2g}\,\gamma}{a};$$

u n'est réel que si $\sqrt{2g}\cdot\frac{k}{a}$ est un multiple de π, ce qui donne

$$u^2=\gamma^2=\alpha+\beta,\quad z=\alpha.$$

Du reste l'équation (1) montre que $\frac{dz}{dt}$ n'est réel que si $z=\alpha$; d'où

$$\frac{dz}{dt}=0.$$

Or $z=\alpha$ forme une solution ou intégrale singulière, et puisque z est constant, il est $= z_0$. La vitesse dont le carré $= 2gz + 2gk$ est aussi constante, et le pendule décrit d'un mouvement uniforme un cône droit. Si l'on met pour les constantes leurs valeurs en fonction de ν_0, z_0, etc., on trouve que pour l'égalité de deux des racines de $fz = 0$, il faut et il suffit que le poids du mobile et la force centripète initiale aient leur résultante dirigée sur le centre de la sphère, ce à quoi on pouvait s'attendre.

Ce second exemple est tiré de la théorie des forces centrales. La force attractive étant $\frac{t^2}{r^2}$, r le rayon vecteur, θ l'angle $\frac{1}{r} = z$, on sait qu'on a

$$d\theta = \frac{cdz}{\sqrt{c' + 2\mu z - c^2 z^2}};$$

si les racines du dénominateur sont égales, on a

$$d\theta\sqrt{-1} = \frac{cdz}{cz - \frac{\mu}{c}},$$

d'où

$$(\theta - \theta_0)\sqrt{-1} = \log\frac{c^2 z - \mu}{c^2 z_0 - \mu}$$

et

$$\frac{c^2 z - \mu}{c_2 z_0 - \beta} = \cos(\theta - \theta_0) + \sqrt{-1}.\sin(\theta - \theta_0).$$

Cette équation ne représente donc pas le monvement, qui est donné par l'intégrale singulière

$$z = \frac{\mu}{c^2}, \quad \frac{d\theta}{dz} = 0.$$

L'orbite est un cercle décrit d'un mouvement uniforme, et la force attractive initiale est égale à la force centripète. Le mouvement circulaire n'est d'ailleurs pas non plus compris dans le cas général du mouvement sur la section conique.

La condition des racines égales donne

$$\mu^2 + c^2 c' = 0,$$

où

$$c' = v_0^2 - \frac{2\mu}{r_0},$$

v_0 vitesse initiale, r_0 rayon vecteur initial;

$$c = r_0 v_0 \sin\alpha,$$

α angle que fait r_0 avec la direction de v_0. Par conséquent notre condition devient (je supprime l'indice o pour simplifier)

$$\mu^2 + \left(v^2 - \frac{2\mu}{r}\right) r^2 v^2 \sin^2\alpha = 0$$

ou

$$\mu^2 - 2\mu r v^2 \sin^2\alpha + r^2 v^4 \sin^2\alpha = 0;$$

ajoutant et retranchant,

$$(\mu - r v^2 \sin^2\alpha)^2 + r^2 v^4 \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0,$$

ce qui exige que

$$\mu - r v^2 \sin^2\alpha = 0 \quad \text{et} \quad \sin^2\alpha \cos^2\alpha = 0.$$

On ne peut supposer

$$\sin^2\alpha = 0;$$

il en résulterait

$$\mu = 0,$$

donc

$$\cos^2\alpha = 0;$$

d'où

$$\sin^2\alpha = 1 \quad \text{et} \quad \mu = r v^2,$$

puis

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{v^2}{r}.$$

Donc en effet la force attractive initiale est égale à la force centripète et la vitesse v_0 proportionnelle à r_0.

On reconnaît d'ailleurs facilement que les solutions de ces cas particuliers sont des intégrales singulières.

Je prends pour troisième exemple la toupie. J'ai prouvé que sous certaines conditions la toupie ne tombe pas, et que sa pointe décrit une courbe renfermée entre deux cercles, courbe composée en général d'une infinité de branches égales (*voir* t. IX, p. 310) (*).

Mais ceci n'a lieu que si le numérateur de $\frac{dz^2}{dt^2}$ qui $= 2g(\zeta - \gamma)[\zeta^2 - \beta^2 - \lambda(\zeta - \gamma)]$, n'a pas de *racines égales*. Le trinôme du second degré ci-dessus n'a ses ra-

---

(*) Les deux propriétés de cette courbe, savoir d'être normale au cercle intérieur et tangente au cercle extérieur, peuvent s'établir plus simplement que je ne l'ai fait dans l'article cité. D'après les notations qui y ont été employées, ψ étant égal à l'angle que le rayon vecteur de la pointe décrit, on a

$$\sin^2\theta \frac{d\psi}{dt} = \frac{C_n}{AB}(\gamma - \zeta).$$

Chaque fois que la pointe est sur le cercle intérieur, on a

$$\zeta = \delta, \quad \text{d'où} \quad \frac{d\psi}{dt} = 0;$$

par conséquent durant dt, le rayon vecteur reste immobile, la pointe se meut sur ce rayon OA, et celui-ci est tangent à la trajectoire. Quant à la circonférence extérieure, soit, en général, $SO = \rho$, la tangente de l'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur ρ est $\frac{\rho d\psi}{d\rho}$, ou, vu que $\rho = \beta \sin\theta$, $\frac{\sin\theta\, d\psi}{\cos\theta\, d\theta}$. Mais en B, où ζ a son minimum et θ son maximum, $d\theta$ est nul, et le minimum de ζ étant $< \gamma$, $d\psi$ n'est pas nul. Donc $\frac{\rho d\psi}{d\rho}$ y est infini, et la tangente est perpendiculaire au rayon vecteur OB.

cines égales que si $\gamma = \beta$, $\lambda = 2\beta$; sauf ce cas, deux racines ne peuvent être égales entre elles que si elles les ont à γ; ainsi il faut que $\gamma^2 - \beta^2 = 0$ ou $\beta = \gamma$, c'est-à-dire qu'à l'origine du mouvement l'axe de la toupie soit vertical, ce qui donne

$$\frac{d + \sqrt{2g}}{\sqrt{\beta^2 + k^2 - \zeta^2}} = \frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)\sqrt{\zeta + \beta - \lambda}}.$$

Cette équation admet l'intégrale singulière

$$\zeta = \beta,$$

qui seule résout la question.

En effet il y a trois cas :

1° $\lambda > 2\beta$. Je désigne par Z une des valeurs que prend $\dfrac{\sqrt{2g}}{\sqrt{\beta^2 - k^2 - \zeta^2}}$ depuis t_0 jusqu'à t, en supposant que ζ puisse varier; on aura

$$z(t - t_0) = \int_\beta^\zeta \frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)\sqrt{\zeta + \beta - \lambda}}.$$

Soit posé

$$\zeta + \beta - \lambda = -u^2;$$

u^2 sera > 0, car ζ ne surpasse point β et $\lambda > 2\beta$. La différentielle devient

$$\frac{2du}{u^2 - \varepsilon^2}$$

et a pour intégrale indéfinie

$$\frac{1}{\varepsilon} \log \frac{u - \varepsilon}{u + \varepsilon} + c;$$

d'où

$$z(t - t_0)\sqrt{-1} = \infty.$$

Car pour $\zeta = \beta$, u^2 est $\lambda - 2\beta = \varepsilon^2$. Donc, etc.

2° $\lambda = 2\beta$. La différentielle devient

$$\frac{d\zeta}{(\zeta - \beta)^{\frac{3}{2}}},$$

et l'intégrale entre β et ζ est encore infinie.

3° $\lambda < 2\beta$. On fera

$$\zeta + \beta - \lambda = u^2, \quad 2\beta - \lambda = \varepsilon^2,$$

et la différentielle est encore

$$\frac{2\,du}{u^2 - \varepsilon^2}.$$

Donc dans aucun cas l'intégrale générale ne convient.

Il y aurait une généralité à déduire de là.