G. BARTET

H. LÉBASTEUR

Résolution de la question proposée pour l'admission à l'École normale en 1861

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 133-137

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__133_0>

RÉSOLUTION DE LA QUESTION PROPOSÉE POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE EN 1861 (p. 26);

PAR MM. G. BARTET ET H. LÉBASTEUR,
Elèves du lycée Napoléon (classe de M. Vacquant).

Nous traitons le problème dans le cas de l'ellipse, en prenant les deux axes de la courbe pour axes coordonnés.

Soient α et β les coordonnées du point P, (x_1, y_1) étant le pôle de l'une quelconque des sécantes passant par P. Nous avons

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1, \tag{1}$$

$$\frac{\alpha x_1}{a^2}+\frac{\beta y_1}{b^2}=1, \tag{2}$$

$$y-y_1=\frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x-x_1). \tag{3}$$

Éliminant x_1 y_1, on obtient

$$y-\frac{b^2(x-\alpha)}{\beta x-\alpha y}=-\frac{x-\alpha}{y-\beta}\left(x+\frac{a^2(y-\beta)}{\beta x-\alpha y}\right);$$

transportant l'origine au point P (α, β), on a

$$(\beta x-\alpha y)(\beta y+\alpha x)+(\beta x-\alpha y)(x^2+y^2)+c^2xy=0;$$

donc le lieu ne dépend que de la quantité c, distance des deux foyers, ce qui démontre la deuxième partie de l'énoncé.

Tangentes en P. — La courbe passe évidemment en

P, origine des coordonnées. Cherchons le coefficient angulaire de la tangente en ce point. A cet effet nous posons $y = tx$ et nous ferons tendre x et y vers o. Nous aurons

$$t^2 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 - c^2}{\alpha\beta} t - 1 = 0;$$

d'où ce résultat, que les tangentes en P sont rectangulaires; donc le point P est un point double.

III^e Question (p. 26). — La courbe cherchée est évidemment la courbe enveloppe de la perpendiculaire abaissée du pôle sur la polaire.

Eliminant y_1 entre les équations (2) et (3), on a

$$\alpha c^2 x_1^2 - a^2 x_1 (c^2 + \beta y + \alpha x) + a^4 x = 0.$$

Dérivant par rapport à x_1, on a

$$x_1 = \frac{a^2 (c^2 + \beta y + \alpha x)}{2\alpha c^2},$$

d'où l'équation du lieu

$$(c^2 + \beta y + \alpha x)^2 = 4\alpha c^2 x,$$

équation d'une parabole tangente aux deux axes à des distances

$$x = \frac{c^2}{\alpha}, \quad y = -\frac{c^2}{\beta},$$

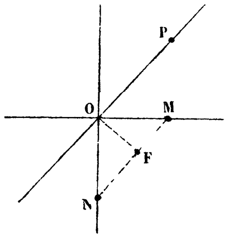
et dont la direction de l'axe est

$$\beta y + \alpha x = 0,$$

et la droite OP est évidemment la directrice. Donc les tangentes à la parabole du point P sont rectangulaires, et comme il est aisé d'avoir le foyer F, on peut construire géométriquement ces tangentes.

Les tangentes au lieu passant par le point P sont rec-

Fig. 1



tangulaires, les tangentes à la parabole passant par le même point le sont aussi ; quelle relation existe-t-il entre la direction de ces deux systèmes de tangentes?

Nous remarquons que la courbe trouvée n'est autre chose que la podaire de la parabole, le point P étant le point fixe ; il en résulte que les tangentes à la courbe au point P sont perpendiculaires aux tangentes à la parabole issues du même point (*Géométrie analytique* de M. Briot, article Limaçon de Pascal), et comme ces dernières sont rectangulaires, elles coïncident avec elles.

Ainsi les tangentes en P à la courbe sont rectangulaires, fait que le calcul nous avait donné.

Points remarquables. — La courbe passe par les foyers, ce qui est évident d'après l'équation, et ce que l'on peut apercevoir géométriquement, car si l'on mène les sécantes passant par les foyers, les pôles sont sur les directrices ; donc ils se projettent aux foyers.

La courbe passe évidemment par les points de contact des tangentes à la conique issues du point P.

L'équation rend aussi évident que la courbe passe par les points où les nouveaux axes coupent les anciens.

Bien que l'énoncé ne comporte pas la construction du lieu, elle ne serait pas difficile à effectuer en prenant l'équation polaire

$$\rho = \frac{d^2 \sin 2(\varphi - \omega) - c^2 \sin^2 2\omega}{2d \sin(\varphi - \omega)},$$

d et φ étant les coordonnées polaires du point P.

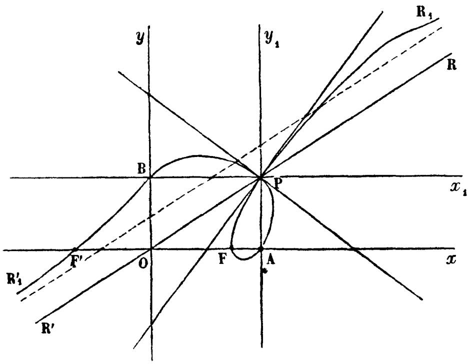
On peut aussi pour construire la courbe chercher les points où elle est coupée par une droite tournant autour de P, $y = mx$. Les abscisses des points d'intersection seront données par $x^2 = 0$, et

$$x = -\frac{\alpha\beta m^2 + (\alpha^2 - \beta^2 - c^2)m - \alpha\beta}{(1 + m^2)(\alpha m - \beta)},$$

ce qui montre qu'une sécante menée par P coupe toujours la courbe en trois points, deux confondus en P et le troisième ayant pour abscisses la valeur écrite ci-devant.

Il est à remarquer que lorsque le point P est sur l'un

FIG. 2.



des axes de la conique, le lieu se compose d'un cercle et d'une droite.

La parabole se réduit alors à une droite.

Enfin lorsque la conique donnée est un cercle, le lieu est aussi un cercle et une droite, et en effet dans ce cas le lieu n'est que celui des milieux des sécantes menées par un point fixe dans un cercle.

Dans ce cas la discussion de l'équation montre que :

La portion de branche $F' R'_1$ devient la portion de droite OR' ;

La branche PR_1 devient la portion de droite PR ;

L'arc de courbe PF devient la portion de droite OP ;

Et l'arc F' BPAF la circonférence décrite sur OP comme diamètre.