NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. LAURENT

Théorème sur les séries

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 126-129

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__126_1>

THÉORÈME SUR LES SÉRIES;

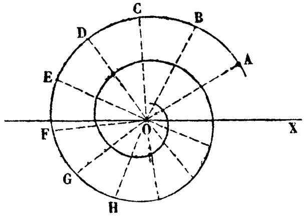
PAR M. H. LAURENT,
Elève de l'École Polytechnique (*).

Je prends la liberté de vous envoyer la démonstration d'un théorème assez singulier sur les séries, théorème que j'ai trouvé en étudiant les propriétés des spirales. Je ne sais si ce théorème est déjà connu, mais à coup sûr la démonstration que je vais vous donner ne l'est pas. Elle vous semblera sans doute singulière et même pis, mais je la donne telle qu'elle s'est présentée à moi.

Considérons une spirale ayant un point asymptotique

(*) Fils du celèbre chimiste philosophe si prématurément perdu pour la science. Né à la Folie, près Langres, le 14 novembre 1807, mort à Paris le 15 avril 1853.

en O, supposons que le rayon vecteur de la spirale aille



en décroissant quand l'angle de ce rayon avec l'axe OX croît; menons une série de rayons vecteurs OA, OB, OC,... faisant avec l'axe OX des angles θ, 2θ, $3\theta,\ldots, n\theta,\ldots$; soient $r_1, r_2, r_3,\ldots, r_n,\ldots$ les longueurs de ces rayons. Par un point O du plan de la spirale, menons une droite *oa* égale et de même sens OA, par le point *a* une droite égale à OB et de même sens que OB, etc.; nous formerons ainsi une espèce de polygone spiral dont les côtés seront asymptotiques à un certain point Ω.

En effet, considérons deux côtés consécutifs *bc* et *cd* du polygone spiral, prolongeons *cd* d'une longueur *dd'* telle que $cd' = bc$; le cercle passant en b, c, d' contiendra dans son intérieur tous les côtés du polygone spiral qui suivent *bc*, car il serait circonscrit à ce polygone si on lui supposait tous ses côtés égaux à *bc*, or à mesure que les côtés du polygone spiral vont en diminuant, le cercle qui passe par les extrémités d'un côté et le point obtenu en prolongeant le côté suivant d'une quantité qui le rend égal au premier, va aussi en diminuant; tout en restant intérieur au cercle qui passe en b, c, d, ce cercle finit par se réduire à son centre qui sera le point Ω.

Il résulte de là que les droites *ob*, *oc*, *od*,... tendent vers une position limite $o\Omega$. Projetons alors le contour *abc*... *g*, sur l'axe OX, nous aurons

$$r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta = \overline{og} \cos(\overline{og}, \overline{oX}),$$

et, en passant aux limites,

$$r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots + r_n \cos n\theta + \ldots = \overline{o\Omega} \cos(\overline{o\Omega}, \overline{OX}).$$

En projetant sur une droite perpendiculaire à OX on aurait trouvé

$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots + r_n \sin n\theta \ldots = \overline{o\Omega} \sin(\overline{o\Omega}, \overline{OX}).$$

Ces résultats sont inexacts quand l'angle θ est un multiple de π, car les cercles dont j'ai parlé ont des rayons infinis. On peut donc énoncer le théorème suivant :

Si $r_1, r_2, r_3, \ldots, r_n \ldots$ *sont des nombres indéfiniment décroissants, les séries*

$$r_1 \cos\theta + r_2 \cos 2\theta + \ldots,$$

$$r_1 \sin\theta + r_2 \sin 2\theta + \ldots,$$

sont convergentes.

1° Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on retrouve un théorème connu.

2° Si l'on prend une spirale hyperbolique et si l'on mène des rayons vecteurs angulairement équidistants le polygone spiral de tout à l'heure va nous fournir les deux séries convergentes

$$\frac{1}{\theta} \sin\theta + \frac{1}{2\theta} \sin 2\theta + \ldots,$$

$$\frac{1}{\theta} \cos\theta + \frac{1}{2\theta} \cos 2\theta + \ldots,$$

ou

$$\sin\theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{3} \sin 3\theta \ldots,$$

$$\cos\theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{3} \cos 3\theta \ldots.$$

Je vous avouerai, Monsieur, que lorsque j'ai trouvé le théorème précédent je ne le cherchais pas : la marche que j'ai suivie le montre assez ; ensuite je vous dirai aussi que c'est en appliquant la théorie des imaginaires de M. Mourey et non en projetant le polygone spiral que je suis arrivé. C'est ainsi que je démontrais la convergence de la série

$$r_1(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) + r_2(\cos 2\theta + \sqrt{-1}\sin 2\theta) + \ldots.$$

Je n'ai pas voulu vous donner la démonstration telle que je l'avais trouvée : les idées de M. Mourey n'étant pas goûtées de tout le monde, j'aurais pu sembler par trop excentrique.

Il y a une chose qui aurait besoin, je crois, d'être éclaircie. Lorsque l'on a égalité entre deux séries convergentes

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n \ldots = b_0 + b_1 x + \ldots b_n x^n + \ldots,$$

pour toutes les valeurs de x comprises entre o et α ou entre $-\alpha$ et $+\beta$, α et β étant positifs, Cauchy démontre dans son Analyse algébrique que l'on a en général $a_n = b_n$. En est-il encore ainsi quand les deux séries précédentes ne sont égales que lorsque x varie de $+\alpha$ à $+\beta$? Ceci revient à démontrer que si une série telle que

$$A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$$

est nulle pour toutes les valeurs de x comprises entre les deux nombres positifs α et β, elle est identiquement nulle, c'est-à-dire que $A_0 = 0$, $A_1 = 0, \ldots, A_n = 0$. Ces questions me semblent d'une haute importance.
