Nouvelles annales de mathématiques

P.-A.-G. Colombier

Différences et dérivées d'un ordre quelconque des deux fonctions circulaires $\sin(ax+b), \cos(ax+b)$

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 11-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__11_1>

DIFFÉRENCES ET DÉRIVÉES
d'un ordre quelconque des deux fonctions circulaires
$\sin(ax+b)$, $\cos(ax+b)$

(voir t. IX, p. 29);

PAR M. P.-A.-G. COLOMBIER,
Professeur à Paris.

1. *Notations.* — Pour simplier l'écriture, on conviendra de désigner

$$2\sin\frac{a\Delta x}{2} \quad \text{et} \quad \frac{a\Delta x+\pi}{2}$$

respectivement par A et B.

2. PROBLÈME I. — *Trouver la différence de l'ordre m*

de la fonction

$$y = \sin(ax + b),$$

quel que soit le nombre entier et positif m.

Solution. — Si l'on donne à la variable indépendante x un accroissement Δx, la fonction y prend un accroissement correspondant Δy, et l'on a

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(ax + b + a\Delta x) - \sin(ax + b) \\ &= \mathrm{A}\cos\left(ax + b + \frac{a\Delta x}{2}\right); \end{aligned}$$

mais

$$\cos\left(ax + b + \frac{a\Delta x}{2}\right) = \sin\left(ax + b + \frac{a\Delta x + \pi}{2}\right),$$

donc

$$\Delta y = \mathrm{A}\sin(ax + b + \mathrm{B}),$$

ce qui montre que la différence première de la fonction $\sin(ax + b)$ est le produit du facteur constant A par ce que devient la fonction donnée lorsqu'on augmente l'arc $ax + b$ de la constante B.

Cela posé, si l'on a égard à la règle qui donne la différence première d'un produit de deux facteurs dont l'un est constant, on aura immédiatement

$$\begin{aligned} \Delta^2 y &= \mathrm{A}^2\sin(ax + b + 2\mathrm{B}), \\ \Delta^3 y &= \mathrm{A}^3\sin(ax + b + 3\mathrm{B}), \end{aligned}$$

et, en général,

$$\Delta^m y = \mathrm{A}^m\sin(ax + b + m\mathrm{B}). \tag{1}$$

On démontrerait la généralité de cette formule par l'emploi de la méthode de Newton, dite *de proche en proche*.

3. *Observation.* — Dans les Traités de Calcul infinité-

simal où l'on s'occupe du problème précédent, on trouve deux formules pour représenter $\Delta^m y$. De plus, dans l'une de ces formules on distingue le cas où m est simplement pair et celui où m est doublement pair; dans l'autre on fait les mêmes distinctions pour $m-1$. La formule (1) convenant à tous les cas, sans qu'il soit nécessaire de faire aucune hypothèse sur m, fournit donc une réponse plus simple du problème ci-dessus.

4. *Corollaire I.* — Si l'on divise les deux membres de l'équation (1) par Δx^m, on aura

$$\frac{\Delta^m y}{\Delta x^m} = a^m \left(\frac{A}{a\Delta x}\right)^m \sin(ax + b + m\mathrm{B}).$$

Si l'on suppose que Δx décroisse indéfiniment de manière à pouvoir différer de zéro, d'aussi peu que l'on voudra, on aura à la limite

$$(2) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = a^m \sin\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right).$$

5. *Corollaire II.* — Si l'on fait dans cette formule $b=0$, et $a=1$, il vient

$$(3) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \sin\left(x + m\frac{\pi}{2}\right).$$

On peut trouver la formule (3) directement en suivant une méthode employée dans le problème I.

6. Problème II. — *Trouver la différence de l'ordre m de la fonction*

$$y_1 = \cos(ax + b),$$

quel que soit le nombre entier et positif m.

Première solution. — On suit une méthode semblable à celle employée dans le problème I, et l'on parvient à la formule suivante

$$(4)\qquad \Delta^m y_1 = \mathrm{A}^m \cos(ax + b + m\mathrm{B}).$$

Seconde solution. — On peut faire dépendre la solution du problème II de celle du problème I de la manière suivante :

On a l'égalité

$$\cos(ax + b) = \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2}\right);$$

prenant la différence de l'ordre m de chaque membre, on a immédiatement, en vertu du problème I,

$$\Delta^m y_1 = \mathrm{A}^m \sin\left(ax + b + \frac{\pi}{2} + m\mathrm{B}\right).$$

Si l'on retranche $\frac{\pi}{2}$ à cet arc, le sinus se change en cosinus, et l'on retrouve l'équation (4).

7. *Corollaire I.* — La formule (4) donne

$$\frac{\Delta^m y_1}{\Delta x^m} = a^m \left(\frac{\mathrm{A}}{a\,\Delta x}\right)^m \cos(ax + b + m\mathrm{B});$$

faisant tendre Δx indéfiniment vers zéro, de manière à en différer de moins toute quantité donnée, on aura à la limite

$$(5)\qquad \frac{d^m y_1}{dx^m} a^m \cos\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right).$$

8. *Corollaire II.* — Si l'on fait dans cette formule $a = 1$ et $b = 0$, il vient

$$(6)\qquad \frac{d^m y_1}{dx^m} = \cos\left(x + m\frac{\pi}{2}\right).$$

On peut trouver la formule (6) directement en suivant une méthode semblable à celle du problème I.

9. *Scolies.* — Les formules (1) et (4) donnent les relations suivantes

$$(\Delta^m y)^2 + (\Delta^m y_1)^2 = (A^m)^2$$

et

$$\frac{\Delta^m y}{\Delta^m y_1} = \operatorname{tang}(ax + b + mB).$$

Les formules (2) et (5) donnent

$$\left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)^2 + \left(\frac{d^m y_1}{dx^m}\right)^2 = (a^m)^2$$

et

$$\frac{d^m y}{dx^m} : \frac{d^m y_1}{dx^m} = \operatorname{tang}\left(ax + b + m\frac{\pi}{2}\right).$$

10. *Historique.* — Les formules (3) et (6) sont dues à M. Hoëné Wronski. On les trouve à la page 451 de celui de ses ouvrages qui a pour titre : *Philosophie de la Technie algorithmique*. Ce savant est arrivé à ces deux formules en prenant les dérivées de l'ordre m des deux membres de chacune des relations

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right), \tag{7}$$

$$\sin x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left(e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}\right). \tag{8}$$

Nous dirons en passant que les formules (7) et (8) sont dues à Jean Bernoulli, bien qu'elles aient été publiées pour la première fois par Léonard Euler.