Théorie des diamètres rectilignes et curvilignes ; d'après le Rév. Salmon

Nouvelles annales de mathématiques 2e série, tome 1 (1862), p. 119-122

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__119_1>

THÉORIE DES DIAMÈTRES RECTILIGNES ET CURVILIGNES

D'APRÈS LE RÉV. SALMON.

(*Higher Plane Curves*, page 48.)

1. *Lemme.* $U = \varphi(x, y)$:

$$\varphi(x + x', y + y') = U' + \left(x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy}\right)$$

$$+ \frac{1}{2}\left(x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(x' \frac{dU}{dx} + y' \frac{dU}{dy}\right)^3 + \ldots.$$

En développant, il faut changer $\left(\frac{dU}{dx}\right)^p$ en $\left(\frac{d^pU}{dx^p}\right)$, $\left(\frac{dU}{dx}\right)^p \left(\frac{dU}{dx}\right)^q$ en $\frac{d^{p+q}U}{dx^{p+q}}$, etc.

2. L'équation polaire d'une courbe donnée par une équation de degré n en x, y s'obtient en remplaçant x, y par $\rho \cos\theta$, $\rho \sin\theta$ (pour des axes rectangulaires, ou

par m, n pour des axes quelconques) et l'on obtient

$$A\rho^n + A_1\rho^{n-1} + A_2\rho^{n-2} + \ldots + A_n = 0;$$

les A sont des fonctions de $\sin\theta$, $\cos\theta$; $\frac{A_1}{A}$ est la somme des distances à l'origine de ces intersections de la corde faisant un angle θ avec l'axe des x; $\frac{A_2}{A}$ la somme de ces mêmes distances prises deux à deux, etc. (Albert Girard).

3. Soit

$$U = u_n + u_{n-1} + \ldots + u_p + \ \ldots + u_0,$$

u_p est une fonction homogène de degré p en x, y.

Si l'on transporte l'origine au point x', y', l'on obtient

$$U + \left(x'\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dx}\right) + \frac{1}{2}\left(x'\frac{dU}{dy} + y'\frac{dU}{dy}\right)^2 + \ldots.$$

Si l'on passe aux coordonnées polaires, le coefficient de ρ^{n-1} s'obtient en substituant $\cos\theta$, $\sin\theta$, au lieu de x, y dans u_{n-1} et dans $x'\frac{du_n}{dx} + y'\frac{du_n}{dy}$.

Le coefficient ρ^{n-2} s'obtient en faisant les mêmes substitutions dans u_{n-2}.

4. *Diamètre du premier degré.* — Étant donnée une corde faisant avec l'axe des x un angle θ, le lieu du point dont la somme des distances aux n points d'intersection est nulle est donné par l'équation

$$x\frac{du_n}{dx} + y\frac{du_n}{dy} + u_{n-1} = 0, \qquad (\textit{Voir n}^o\ 3.)$$

équation d'une droite (Newton).

Diamètre du deuxième degré. — Même donnée; le lieu du point dont la somme des distances prises deux à deux est nulle, est donné par l'équation

$$u_{n-2} + x\frac{du_{n-1}}{dx} + y\frac{du_{n-1}}{dy}$$
$$+ \frac{1}{2}\left[x^2\frac{d^2u_n}{dx^2} + 2xy\frac{d^2u_n}{dxdy} + y^2\frac{d^2u_n}{dy^2}\right] = 0,$$

équation d'une conique.

Et de même pour les diamètres d'un degré plus élevé.

5. *Conique diamétrale.* — C'est le lieu des points milieux des cordes parallèles. Soit M un point de la courbe et y_1 son ordonnée; N un point correspondant de la conique diamétrale et y son ordonnée; MN distance du point de la conique au point de la courbe $y - y_1$, $y - y_2$, etc. On a par définition

$$\Sigma(y - y_1)(y - y_2) = 0,$$

ou bien

$$\frac{n(n-1)}{2}y^2 - (n-1)y\,\Sigma y_1 + \Sigma y_1 y_2 = 0.$$

1° Le produit des deux racines est $\frac{2\Sigma y_1 y_2}{n(n-1)}$.

Ainsi le produit des deux distances de l'origine aux deux points de la conique est égale à la moyenne des produits des distances de l'origine à la courbe prises deux à deux.

2° La somme des deux racines est $\frac{2\Sigma y_1}{n}$; la moyenne pour la courbe est $\frac{\Sigma y_1}{n}$ pour un point de la conique, et par conséquent $\frac{2\Sigma y_1}{n}$ pour les deux points; les deux moyennes donnent le même point; donc la conique et la courbe ont le même diamètre rectiligne.

6. *Cubique diamétrale.* — Même désignation que ci-dessus; on aura

$$\Sigma(y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)=\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)}{1.2}y^2\Sigma y+\frac{n-2}{1}y\Sigma y_1y_2-\Sigma y_1y_2y_3.$$

On conclut alors que la courbe et la cubique ont le même diamètre; car la moyenne pour un point de la cubique est $\frac{\Sigma y_1}{n}$ et pour les trois points $\frac{3\Sigma y_1}{n}$.

Centres.

Ce mot est pris dans une double acception.

Lorsque dans l'équation polaire de degré n les termes du degré $n-1$ manquent, le pôle peut prendre le nom de centre.

Lorsque l'équation ne contient que des puissances paires du rayon vecteur, alors le pôle est un centre dans le sens le plus général. Si l'équation en x, y est de degré pair, pour que l'origine soit un centre, dans le sens général, l'équation rendue polaire doit avoir la forme

$$u_0+u_2+u_4+\ldots=0;$$

les indices indiquent les puissances du rayon vecteur.

Et si l'équation en x, y est de degré impair, elle ne doit contenir que des puissances impaires de la variable; par conséquent le centre est sur la courbe, puisque l'équation est satisfaite par $x=y=0$; rendue à la forme polaire, elle sera divisible par le rayon vecteur et ne contiendra plus que des puissances paires de ce rayon vecteur.