

TERQUEM

Série homographique

Nouvelles annales de mathématiques 2^e série, tome 1
(1862), p. 114-116

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1862_2_1__114_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1862, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SÉRIE HOMOGRAPHIQUE.

Lemme. — Soient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2p}$, etc., une série de termes telle, que dans quatre termes consécutifs la somme des extrêmes surpasse la somme des moyens de la quantité constante n .

Termes généraux.

$$a_{2n} = (n - 1)(a_3 - a_1) + a_2 + 2^{n-2}k,$$

$$a_{2n+1} = n(a_3 - a_1) + a_1 + 2^{n-1}k,$$

faciles à trouver.

Corollaire. p termes quelconques étant liés par une équation linéaire, on calcule facilement les termes généraux, par la théorie des séries récurrentes.

Termes sommatoires.

Soit la série $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{2n}$, et S_{2n} le terme sommatoire

$$S_{2n} = \frac{n(n-1)}{2} (a_3 - a_1) + na_2 + 4^{n-2}k,$$

$$S_{2n+1} = \frac{n(n-1)}{2} (a_3 - a_1) + na_1 + 2 \cdot 4^{n-2}k.$$

Somme totale :

$$n(n-1)(a_3 - a_1)n(a_2 + a_1) + 3 \cdot 4^{n-2}k.$$

Soient a_1, a_2, a_3, \dots , les trois premiers termes d'une série telle, que dans les termes consécutifs le produit des extrêmes divisé par le produit des moyens donne un quotient constant $\log k$.

Faisons

$$a_1 = e^{x_1}, \quad a_2 = e^{x_2}, \dots, \quad a_p = e^{x_p}, \dots,$$

la solution énoncée s'écrira ainsi :

$$e^{x_{p_1} + x_{p_2} - x_{p_3} - x_{p_4}} = \log k,$$

d'où

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = k.$$

D'après le lemme

$$x_{2n} = (n-1)(x_3 - x_1) + x_2 + 2^{n-2}k,$$

$$x_{2n+1} = n(x_3 - x_1) + x_1 + 2^{n-1}k,$$

$$x_{2n+2} = n(x_3 - x_1) + x_2 + 2^n k,$$

$$x_{2n+3} = (n+1)(x_3 - x_1) + x_1 + 2^{n+1}k,$$

on a

$$x_{2n} = \frac{x_{2n+1} \cdot x_{2n+2} + k}{x_{2n+3}}.$$

Substituant les valeurs de $x_{2n+1}, x_{2n+2}, x_{2n+3}$, on aura x_{2n}

en fonction de $x_3, x_1, x_2,$

$$e^{x_n} = e^{(n-1)(x_3-x_1)+x_2+2^{n-2}k},$$

Prenant les logarithmes, on a

$$a_{2n} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^{n-1} \cdot a_1 \cdot 2^{n-2} k,$$

$$a_{2n+1} = \left(\frac{a_3}{a_1}\right)^n \cdot a_1 \cdot 2^{n-1} k.$$

Donnant successivement à n les valeurs 1, 2, 3, . . . , 4, on trouve sans difficulté le terme sommatoire.

Remarque. — Il est évident que cette méthode s'applique à une relation qui comprend un multiple quelconque de rapports. Le plus simple est le produit binaire autrement dit anharmonique.

A chaque relation correspond une propriété géométrique, correspondance que M. Chasles a brillamment établie pour le rapport binaire (*).