E. DE JONQUIÈRES

Solution de la question 548

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 85-87

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__85_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 548

(voir t. XIX, p. 405 et t. XX, p. 56);

PAR M. E. DÉ JONQUIÈRES.

Lieu géométrique des foyers de coniques assujetties à quatre conditions communes.

On peut, en se servant d'un procédé de démonstration employé par M. Chasles, dans son Cours à la Sorbonne, pour le cas où les coniques ont quatre points communs, trouver aisément, sans aucun calcul, le degré de la courbe, lieu des foyers d'une série de coniques assujetties à quatre conditions quelconques. *Ce degré est* $3n$, n étant le nombre des coniques qui satisfont aux quatre conditions proposées et qui touchent une droite donnée; *et la courbe a deux points multiples imaginaires de l'ordre* n *situés à l'infini sur un cercle.*

Pour le démontrer, supposons d'abord qu'on cherche le degré de la courbe, lieu des points de rencontre des tangentes menées aux coniques de la série proposée par deux points fixes P, P', donnés dans leur plan commun.

Menons, par le point P, une droite quelconque PL, et soit n le nombre des coniques de la série qui touchent PL. On pourra, par le point P', mener $2n$ tangentes à ces coniques, lesquelles couperont PL en $2n$ points appartenant à la courbe cherchée.

En outre, la droite PP′ est elle-même touchée par n coniques de la série, auxquelles on peut mener n autres tangentes par le point P. Ces n tangentes coupent la tangente PP′ au point P lui-même, qui par conséquent est un point n^{tuple}; et de même pour le point P′.

Ainsi le lieu cherché possède, sur toute droite PL, issue du point P, $3n$ points, dont n se confondent en un seul au point P. Donc ce lieu est du degré $3n$.

Si les points P, P′ sont les deux points imaginaires situés à l'infini sur un cercle, deux des sommets du quadrilatère circonscrit à chaque conique restent réels; ce sont les foyers de la conique; ce qui démontre le théorème énoncé ci-dessus.

Autrement. Soient U une conique quelconque, n'appartenant pas à la série proposée, et L une tangente quelconque de cette conique. Il existe, dans la série, n coniques qui touchent L, et chacune de ces courbes a trois autres tangentes communes avec U, lesquelles rencontrent L en trois points. Donc la courbe cherchée a $3n$ points sur L, ce qui prouve qu'elle est du degré $3n$.

Si U se réduit à une ellipse infiniment aplatie, c'est-à-dire à un segment terminé, et que ce segment devienne lui-même le segment imaginaire intercepté par un cercle sur la droite située à l'infini, les points de concours des tangentes communes à U et aux coniques de la série proposée deviennent les foyers de ces courbes; ce qui démontre le théorème, quant au degré du lieu de ces foyers.

On conclut de là que :

1° Si les coniques passent par quatre mêmes points, $n=2$, et le lieu des foyers est du sixième ordre, avec deux points doubles à l'infini sur un cercle.

2° Si les coniques passent par trois mêmes points et touchent une droite (c'est le cas de la question n° 548), $n=4$, et le lieu est du douzième ordre, avec deux points quadruples à l'infini sur un cercle. De même si les coniques passent par deux points et touchent deux droites.

3° Si les coniques sont inscrites dans le même quadrilatère, $n = 1$; le lieu est simplement du troisième ordre.

4° Si les coniques sont normales à quatre mêmes droites, $n = 51$; le lieu est de l'ordre 153, avec deux points multiples imaginaires de l'ordre 51 à l'infini sur un cercle.

5° Si les coniques passent par trois points et touchent une courbe donnée d'ordre m, on a $n = 2m(m+1)$; le lieu des foyers est donc de l'ordre $6m(m+1)$.

6° Si les coniques passent par deux mêmes points et ont un double contact avec une courbe de degré m, le lieu des foyers est de l'ordre $3m(m-1)(m^2+3m-8)$, et ainsi de suite.