NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

F.-A. BEYNAC

# Questions d'examen (École polytechnique, 1860)

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 20 (1861), p. 7-15

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__7_0>

## QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE, 1860);

PAR M. F.-A. BEYNAC,
Professeur.

I. *Quel est le plus grand des nombres*

$$\sqrt{2},\quad \sqrt[3]{3},\quad \sqrt[4]{4},\ldots ?$$

Considérons les deux nombres $\sqrt[n]{n}$, $\sqrt[n+1]{n+1}$; pour les comparer, réduisons-les au même indice, il vient

$$\sqrt[n(n+1)]{n^{n+1}},\quad \sqrt[n(n+1)]{(n+1)^n}.$$

On peut comparer les quantités soumises aux radicaux, après les avoir divisées par $n^n$, et on a les deux nombres $n$ et $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Or,

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2+\frac{1-\frac{1}{n}}{1.2}+\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)}{1.2.3}+\ldots;$$

en outre, on connaît les résultats

$$2<\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{1.2.3}+\ldots<3.$$

Cela posé, observons que pour $n=2$ la seconde racine ou $\sqrt[3]{3}$ est plus grande que la première ou $\sqrt[2]{2}$; pour $n=3$ on a $n>\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, donc la première racine ou $\sqrt[3]{3}$ est plus grande que la seconde ou $\sqrt[4]{4}$; pour $n>3$ la première est toujours plus grande que la suivante, on a donc

$$\sqrt[2]{2} < \sqrt[3]{3} > \sqrt[4]{4} > \sqrt[5]{5} > \ldots$$

Donc $\sqrt[3]{3}$ est le plus grand terme de la série.

II. *Toute puissance entière d'une somme de deux carrés est elle-même une somme de deux carrés.*

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2.$$

En effet, on a

$$(a + b\sqrt{-1})^m = A + B\sqrt{-1},$$
$$(a - b\sqrt{-1})^m = A - B\sqrt{-1}.$$

Multipliant membre à membre, on a

$$(a^2 + b^2)^m = A^2 + B^2.$$

III. *Calcul de la somme des coefficients, pris de 4 en 4, dans le développement de* $(x + a)^m$.

La question renferme quatre inconnues, car on peut faire la somme à partir du premier terme, du deuxième, du troisième ou du quatrième.

Posons $x = 1$, $a = \sqrt{-1}$, on a

$$(1 + \sqrt{-1})^m = 1 + m\sqrt{-1} - \frac{m(m-1)}{1.2}$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cdot \sqrt{-1} + \ldots$$

Désignons par $S_1$ la somme des coefficients de rang $4n + 1$, $n$ pouvant être nul, par $S_2$, $S_3$, $S_4$ celles de rangs $4n + 2$, $4n + 3$, $4n$. On a

$$(1) \qquad (1 + \sqrt{-1})^m = S_1 + S_2\sqrt{-1} - S_3 - S_4\sqrt{-1},$$
$$(2) \qquad (1 - \sqrt{-1})^m = S_1 - S_2\sqrt{-1} - S_3 + S_4\sqrt{-1}.$$

On sait que la somme $2^{m-1}$ des coefficients des termes de rang pair égale celle des coefficients des termes de rang impair, donc

$$S_1 + S_3 = 2^{m-1}, \quad S_2 + S_4 = 2^{m-1}.$$

Ajoutant et retranchant successivement (1) et (2), on trouve

$$S_1 - S_3 = \frac{(1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{2},$$

$$S_2 - S_4 = \frac{(1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}.$$

De ces résultats on conclut facilement

$$S_1 = \frac{2^m + (1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_3 = \frac{2^m - (1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{4},$$

$$S_2 = \frac{2^m\sqrt{-1} + (1+\sqrt{-1})^m - (1-\sqrt{-1})^m}{4\sqrt{-1}},$$

$$S_4 = \frac{2^m\sqrt{-1} - (1+\sqrt{-1})^m + (1-\sqrt{-1})^m}{4\sqrt{-1}}.$$

Ces quatre valeurs sont réelles, car $\sqrt{-1}$ disparaît dans les réductions.

IV. *Dans quelles conditions le quotient*

$$\frac{(x+1)^m - x^m - 1}{x^2 + x + 1}$$

*est-il entier?*

Il faut et il suffit que les racines de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0$$

vérifient l'équation

$$(x+1)^m - x^m - 1 = 0.$$

Ces racines sont les imaginaires conjuguées

$$-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

il suffit de trouver les conditions pour que l'une d'elles vérifie la deuxième équation. Observons que ces valeurs sont les racines imaginaires cubiques de l'unité

$$\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}, \quad \alpha^2 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{-3};$$

de plus

$$\alpha + 1 = -\alpha^2.$$

Cherchons donc les valeurs de $m$ pour lesquelles on a

$$(1) \qquad (-\alpha^2)^m - \alpha^m - 1 = 0.$$

$m$ désignant un entier quelconque peut être mis sous l'une des formes

$$6p, \quad 6p \pm 1, \quad 6p \pm 2, \quad 6p + 3.$$

1°

$$m = 6p;$$

$$(-\alpha^2)^{6p} = 1, \quad -\alpha^{6p} = -1;$$

le premier membre de (1) se réduit à $-1$.

2°

$$m = 6p + 1;$$

$$(-\alpha^2)^{6p+1} = 1 \times (-\alpha^2)^1 = -\alpha^2, \quad -\alpha^{6p+1} = -\alpha;$$

le premier membre de (1) se réduit à $-\alpha^2 - \alpha - 1$, quantité nulle, puisque $\alpha$ est racine de l'équation

$$x^2 + x + 1 = 0.$$

3°

$$m = 6p - 1;$$

$$(-\alpha^2)^{6p-1} = (-\alpha^2)^{-1} = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad (-\alpha)^{6p-1} = -\frac{1}{\alpha};$$

le premier membre de (1) se réduit à $-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha}-1$;

comme on a

$$\alpha\alpha^2=1,\quad \frac{1}{\alpha^2}=\alpha \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha}=\alpha^2,$$

le premier membre est $-\alpha-\alpha^2-1$, quantité nulle.

4°
$$m=6p+2;$$

$$(-\alpha^2)^{6p+2}=(-\alpha^2)^2=\alpha,\quad (-\alpha)^{6p+2}=-\alpha^2,$$

le premier membre de (1) se réduit à $\alpha-\alpha^2-1$, quantité qui n'est pas nulle.

5°
$$m=6p-2;$$

le premier membre se réduit à $\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\alpha^2}-1$, ou $\alpha^2-\alpha-1$, quantité qui n'est pas nulle.

6°
$$m=6p+3;$$

le premier membre de (1) se réduit à $(-\alpha^2)^3-\alpha^3-1$ ou $-3$.

Pour $m=3$, on a

$$3x^2+3x=0,$$

équation dont les racines sont réelles. Donc, la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient proposé soit entier est

$$m=6p\pm 1.$$

V. *Appliquer la formule du binôme au développement de* $(a+b)^{-1}$.

Dans le développement

$$(a+b)^m=a^m+ma^{m-1}b+\frac{m(m-1)}{1.2}a^{m-2}b^2+\ldots$$

remplaçons $m$ par $-1$, on trouve

$$(a+b)^{-1} = a^{-1} - a^{-2}b + a^{-3}b^2 - a^{-4}b^3 + \ldots$$
$$+ (-1)^p a^{-1-p} b^p + \ldots,$$

ou bien

$$(a+b)^{-1} = \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2} + \frac{b^2}{a^3} - \frac{b^3}{a^4} + \ldots + (-1)^p \frac{b^p}{a^{p+1}} + \ldots.$$

Le second membre est composé d'un nombre illimité de termes, puisque les exposants de $a$ vont en croissant au delà de toute limite en valeur absolue.

Le premier membre a une valeur finie $\frac{1}{a+b}$, il en résulte qu'il ne peut être égal au second que tout autant que celui-ci forme une série convergente, ce qui ne peut avoir lieu que si l'on suppose $a$ plus grand que $b$. Pour $a > b$, le second membre est la somme des termes d'une progression géométrique décroissante indéfiniment dont la raison est $-\frac{1}{a}$, par conséquent elle a pour valeur limite $\frac{\frac{1}{a}}{1+\frac{b}{a}} = \frac{1}{a+b}$.

Il résulte de cette analyse que la formule du binôme est applicable au développement de $(a+b)^{-1}$, pourvu que la série soit ordonnée par rapport aux exposants négatifs croissants en valeur absolue du plus grand des deux termes $a$ et $b$.

VI. *Prouver que le logarithme népérien de*

$$\cos x + \sqrt{-1} \sin x$$

*est* $x\sqrt{-1}$.

Prenant la dérivée de L $(\cos x + \sqrt{-1} \sin x)$, on a

$$\text{dériv.}\, \mathrm{L}(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \frac{-\sin x + \sqrt{-1} \cos x}{\cos x + \sqrt{-1} \sin x}.$$

Multipliant les deux termes du second membre par la conjuguée du dénominateur et réduisant, on trouve

$$\text{dériv.}\,\mathrm{L}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = \sqrt{-1}.$$

On trouve de même

$$\text{dériv.}\,\mathrm{L}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x) = -\sqrt{-1}.$$

La fonction primitive de $\sqrt{-1}$ est $x\sqrt{-1}+\mathrm{C}$; pour $x = 0$, le logarithme est nul, donc $\mathrm{C} = 0$, et l'on a

$$\mathrm{L}(\cos x + \sqrt{-1}\sin x) = x\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{L}(\cos x - \sqrt{-1}\sin x) = -x\sqrt{-1}.$$

*Observation.* Remontant des logarithmes aux nombres, on déduit de ces deux résultats

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = e^{x\sqrt{-1}},$$

$$\cos x - \sqrt{-1}\sin x = e^{-x\sqrt{-1}};$$

par suite

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}},$$

$$\operatorname{tang} x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{\left(e^{x\sqrt{+1}} + e^{-x\sqrt{-1}}\right)\sqrt{-1}}.$$

Pour $x = 2\pi$,

$$\cos 2\pi = 1, \quad \sin 2\pi = 0,$$

et l'on a

$$e^{2\pi\sqrt{-1}} = 1.$$

*Conséquences.* 1° On a trouvé

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{2.3} + \ldots;$$

remplaçant $x$ par $x\sqrt{-1}$, on a, pour

$$e^{x\sqrt{-1}} \text{ ou } \cos x + \sqrt{-1}\sin x,$$

le développement

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = 1 + x\sqrt{-1} - \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \ldots;$$

égalant séparément les parties réelles et les coefficients des imaginaires

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots.$$

2° *Le logarithme d'une quantité négative est une quantité imaginaire.*

Toute quantité imaginaire peut se mettre sous la forme

$$a + b\sqrt{-1} = \rho(\cos x + \sqrt{-1}\sin x),$$

sous la condition

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

On a donc

$$\cos x + \sqrt{-1}\sin x = \frac{a + b\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = e^{x\sqrt{-1}}.$$

Observant que l'on a identiquement

$$\sqrt{a^2 + b^2} = e^{\mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}},$$

on peut écrire

$$a + b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2 + b^2}\cdot e^{x\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1} + \mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}};$$

remplaçant $x$ par $2k\pi + x$, il vient

$$a + b\sqrt{-1} = e^{(2k\pi + x)\sqrt{-1} + \mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}},$$

d'où l'on déduit

$$\mathrm{L}(a + b\sqrt{-1}) = (2k\pi + x)\sqrt{-1} + \mathrm{L}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Si on suppose successivement

$$b = 0, \quad a > 0,$$
$$b = 0, \quad a < 0,$$

on trouve

$$\mathrm{L}a = \mathrm{L}a + 2k\pi\sqrt{-1},$$

$$\mathrm{L}(-a) = \mathrm{L}a + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ces résultats apprennent qu'une quantité a une infinité de logarithmes, et que le logarithme d'une quantité négative est nécessairement imaginaire.