NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAUL SERRET

Nouvelles démonstrations des théorèmes de MM. Faure et Painvin (voir t. XIX, p. 290 et 347)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 77-82

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__77_0>

NOUVELLES DÉMONSTRATIONS DES THÉORÈMES DE MM. FAURE ET PAINVIN

(voir t. XIX, p. 290 et 347) ;

PAR M. PAUL SERRET.

1. Soient : une ellipse,

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

un triangle conjugué ABC ; et le cercle, circonscrit à ce triangle, et représenté par l'équation

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \gamma^2 = 0,$$

où γ désigne la longueur de la tangente menée au cercle par le centre de l'ellipse. Soient, de plus, X, Y les coordonnées du sommet A ; et

$$(2) \qquad y = mx + n$$

l'équation du côté opposé BC ; m et n ayant les valeurs suivantes :

$$(a) \qquad m = -\frac{b^2 X}{a^2 Y}, \quad n = \frac{a^2 b^2}{a^2 Y}.$$

Les sommets B et C du triangle étant deux points conjugués, la droite (2) doit couper le cercle (1) suivant deux points conjugués ; et l'on a, dès lors, entre les coordonnées des points communs au cercle et à la droite, la relation

$$(3) \qquad a^2 . y' y'' + b^2 . x' x'' = a^2 b^2.$$

D'ailleurs l'élimination alternative de x, ou de y, entre les équations (1) et (2), donne les expressions de $y' y''$ et

$x'x''$ en fonction de m, n et, par suite, en fonction de X, Y : et l'on trouve, en substituant ces valeurs dans l'équation de condition (3),

$$(3') \qquad \begin{cases} b^2(\gamma^2 - b^2)X^2 + a^2(\gamma^2 - a^2)Y^2 \\ -a^2b^2(2\alpha X + 2\beta Y - a^2 - b^2) = 0, \end{cases}$$

à laquelle il faut joindre la relation

$$(4) \qquad X^2 + Y^2 - 2\alpha X - 2\beta Y + \gamma^2 = 0,$$

exprimant que le sommet A du triangle appartient au cercle.

Or, les équations (3') et (4) ayant lieu simultanément, l'équation obtenue en multipliant la seconde par $-a^2b^2$ et l'ajoutant à la première, a lieu en même temps que les deux autres : on a donc

$$(5) \qquad (\gamma^2 - a^2 - b^2)(a^2Y^2 + b^2X^2 - a^2b^2) = 0,$$

et comme le sommet A (X, Y) peut être pris arbitrairement dans le plan de l'ellipse, le second facteur n'est pas nul ; l'égalité précédente se réduit à

$$\gamma^2 - a^2 - b^2 = 0,$$

d'où

$$(6) \qquad \gamma^2 = a^2 + b^2.$$

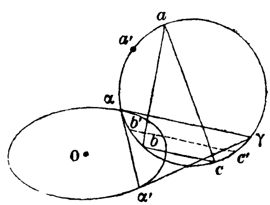
2. On peut parvenir, plus simplement encore, au résultat, par un emploi convenable d'un théorème dû à M. Chasles.

Considérons, à cet effet, un triangle conjugué abc, le cercle circonscrit à ce triangle, et, sur ce cercle, un point a' quelconque, ou tel, du moins, que sa polaire, relative à l'ellipse, coupe le cercle en deux points réels b' et c'. (Cette condition pourra être remplie, d'une infinité de manières, en prenant le point a' suffisamment voisin de l'un des points de rencontre du cercle abc et de l'ellipse.) *Le triangle* a′b′c′, *ainsi défini, sera un triangle conjugué.*

En effet, dans la construction d'un pareil triangle dont un premier sommet a' est donné, on peut choisir le second b', arbitrairement, sur la polaire $b'c'$ du premier : le second sommet b' peut donc, dans le cas actuel, être pris sur le cercle abc. D'ailleurs, par le théorème auquel nous avons fait allusion, *les six sommets de deux triangles conjugués quelconques* abc, a′b′c′ *appartiennent à une même courbe du second degré* : et comme, dans le cas actuel, les cinq premiers sommets a, b, c, a', b' appartiennent, par construction, au cercle abc, il en est de même du sixième.

Cela posé, le triangle abc et le cercle circonscrit demeurant fixes, imaginons que le sommet a' glisse sur ce

Fig. 1.



cercle, en restant extérieur à l'ellipse, et en se rapprochant indéfiniment du point α commun au cercle et à l'ellipse : sa polaire $b'c'$ coupera le cercle en deux points *reels* b', c'; la corde $b'c'$ se rapprochera indéfiniment de la tangente $\alpha\gamma$ de l'ellipse en α, et aussi du point a'. En même temps, l'un des points b', c', le premier par exemple, se rapproche indéfiniment du point a' : d'où il résulte que la limite du côté $a'b'$ est la tangente en α du cercle abc; la limite du point c' étant le pôle γ de cette tangente.

Nous avons donc, par une sorte d'*élimination géomé-*

trique du triangle conjugué primitif abc, cette *construction* générale du cercle circonscrit à un pareil triangle : *Mener dans l'ellipse une corde quelconque* $\alpha\alpha'$, *construire son pôle* γ; *et faire passer par ce pôle un cercle tangent à la corde en l'une de ses extrémités.*

Cette construction établie, on trouve aisément la seconde trace γ' du cercle $\alpha\gamma$ sur le diamètre $O\gamma$ de l'ellipse, et la *puissance* $P^2 = O\gamma . O\gamma'$ du centre de l'ellipse par rapport à ce cercle.

3. Les cercles circonscrits aux triangles conjugués coupent orthogonalement le cercle $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$; et l'axe radical de deux quelconques de ces cercles passe par le centre de l'ellipse.

4. Chaque point de l'ellipse pouvant être considéré comme un triangle conjugué, de dimensions nulles, quel est le cercle circonscrit correspondant? On trouve que chacun de ces cercles, tangent extérieurement à la courbe, a pour diamètre le rayon de courbure correspondant de l'ellipse. L'enveloppe de tous les cercles semblables se compose de l'ellipse proposée et de l'une de ses lignes *réciproques* par rapport au centre, pris pour origine des rayons vecteurs; et la tangente à la ligne de leurs centres est perpendiculaire au diamètre correspondant de l'ellipse (*).

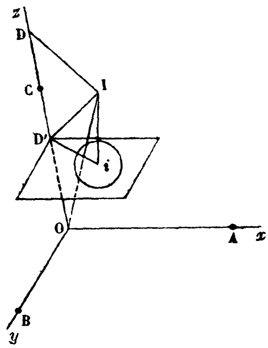
5. On peut déduire, des remarques précédentes, la construction de l'ellipse, connaissant : un premier point de la courbe, et la tangente correspondante; un second point et le cercle de courbure correspondant.

6. Pour passer au théorème de M. Painvin, considérons un ellipsoïde rapporté à trois diamètres conjugués

(*) Belle observation dont la preuve est à désirer. TM.

quelconques OA, OB, OC, ou Ox, Oy, Oz. Ayant coupé cet ellipsoïde par le plan $z = \gamma$, imaginons un triangle $\mathfrak{C}$ conjugué par rapport à la section résultante; et soit, sur Oz, D le pôle du plan $z = \gamma$: le tétraèdre $(\mathfrak{C}, D)$ sera un tétraèdre *conjugué*.

Fig. 2.



Notation. A, B, C demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde;

a, b demi-diamètres conjugués, parallèles à Ox, Oy de la section $z = \gamma$;

r, rayon du cercle circonscrit au triangle $\mathfrak{C}$; R, rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre $(\mathfrak{C}, D)$;

i, centre du cercle $\mathfrak{C}$; I, centre de la sphère $(\mathfrak{C}, D)$; O, centre de l'ellipsoïde; D', centre de la section $z = \gamma$;

$$\text{(A)} \quad \left\{ \begin{array}{ll} OD' = \gamma, & OD = \dfrac{C^2}{\gamma}, \\ a^2 + b^2 = (A^2 + B^2)\dfrac{C^2 - \gamma^2}{C^2}, & \overline{D'i}^2 = r^2 + a^2 + b^2 : \end{array} \right.$$

cette dernière équation n'étant autre chose que la traduction du théorème de M. Faure.

Si nous joignons maintenant le point I aux trois points en ligne droite O, D', D, nous aurons la relation connue

$$\overline{OI}^2 . DD' + \overline{DI}^2 . OD' = \overline{D'I}^2 . OD + OD . OD' . DD' :$$

de là, en remplaçant $\overline{DI}^2$ par R^2; $\overline{D'I}^2$ par sa valeur

$$\overline{D'i}^2 + \overline{iI}^2 = (r^2 + a^2 + b^2) + (R^2 - r^2) = R^2 + a^2 + b^2,$$

déduite de la considération du triangle IiD', rectangle en i, et de l'emploi de la dernière des relations (A),

$$\overline{OI}^2 . DD' + R^2 . OD' = (R^2 + a^2 + b^2) OD + OD . OD' . DD'.$$

Enfin par une réduction évidente, cette dernière équation peut s'écrire

$$\overline{OI}^2 - R^2 = \frac{(a^2 + b^2) OD + OD . OD' . DD'}{DD'} :$$

d'où, par l'emploi des relations (A), et après quelques simplifications,

$$\overline{OI}^2 - R^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

7. Chaque point de l'ellipsoïde peut être considéré comme un tétraèdre conjugué de dimensions nulles; et l'on trouve que la sphère circonscrite correspondante est tangente extérieurement à l'ellipsoïde, son diamètre étant égal à la somme des rayons de courbure principaux de la surface, au point de contact.

Note du Rédacteur. Nous n'avons jusqu'ici que des *vérifications* du beau théorème Faure. L'ingénieux géomètre voudra bien nous donner son procédé d'*invention*; probablement cas particulier de sa méthode générale de transformation métrique, source inépuisable de propriétés de l'espace.