NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-E. KUMMER

Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 72-76

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__72_0>

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XIX, p. 371);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ III. — *Direction des plus courtes distances et plans principaux.*

Considérons maintenant les directions des plus courtes distances entre un rayon et tous les rayons infiniment voisins. Ces directions sont données par les cosinus $\varkappa, \lambda, \mu$ de leurs angles avec les trois axes des coordonnées. Remplaçons dans les formules (13), § I, les différentielles dx, dy, dz, $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ pour les quotients différentiels partiels, et par les différentielles des variables indépendantes, nous aurons :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \varkappa &= \frac{\eta\mathrm{c} - \zeta\mathrm{b} + (\eta\mathrm{c}' - \zeta\mathrm{b}')t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}},\\ \lambda &= \frac{\zeta\mathrm{a} - \xi\mathrm{c} + (\zeta\mathrm{a}' - \xi\mathrm{c}')t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}},\\ \mu &= \frac{\xi\mathrm{b} - \eta\mathrm{a} + (\xi\mathrm{b}' - \eta\mathrm{a}')t}{\sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on prend pour ξ, η, ζ les valeurs données (27), § I,

$$\xi = \frac{\mathcal{A}}{\Delta},\quad \eta = \frac{\mathcal{B}}{\Delta},\quad \zeta = \frac{\mathcal{C}}{\Delta},$$

et si l'on remarque que

$$
\begin{aligned}
\mathcal{B}\mathrm{c} - \mathcal{C}\mathrm{b} &= \mathrm{a}'\mathcal{E} - \mathrm{a}\mathcal{F}, &\quad \mathcal{B}\mathrm{c}' - \mathcal{C}\mathrm{b}' &= \mathrm{a}'\mathcal{F} - \mathrm{a}\mathcal{G},\\
\mathcal{C}\mathrm{a} - \mathcal{A}\mathrm{c} &= \mathrm{b}'\mathcal{E} - \mathrm{b}\mathcal{F}, &\quad \mathcal{C}\mathrm{a}' - \mathcal{A}\mathrm{c}' &= \mathrm{b}'\mathcal{F} - \mathrm{b}\mathcal{G},\\
\mathcal{A}\mathrm{b} - \mathcal{B}\mathrm{a} &= \mathrm{c}'\mathcal{E} - \mathrm{c}\mathcal{F}, &\quad \mathcal{A}\mathrm{b}' - \mathcal{B}\mathrm{a}' &= \mathrm{c}'\mathcal{F} - \mathrm{c}\mathcal{G},
\end{aligned}
$$

on obtiendra

$$
(2)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\varkappa &= \frac{\mathrm{a}'(\mathcal{E}+\mathcal{F}t) - \mathrm{a}(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}},\\
\lambda &= \frac{\mathrm{b}'(\mathcal{E}+\mathcal{F}t) - \mathrm{b}'(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}},\\
\mu &= \frac{\mathrm{c}'(\mathcal{E}+\mathcal{F}t) - \mathrm{c}(\mathcal{F}+\mathcal{G}t)}{\Delta\sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t+\mathcal{G}t^2}}.
\end{aligned}
\right.
$$

Considérons, en particulier, les directions des plus courtes distances qui correspondent aux points limites, à $t = t_1$ et $t = t_2$, et désignons par $\varkappa_1$, λ_1, μ_1, et $\varkappa_2$, λ_2, μ_2, les valeurs de $\varkappa$, λ, μ correspondantes. Au moyen de l'équation (6), § II, qui donne $\mathcal{E}+\mathcal{F}t_1 = -t_2(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)$, nous obtenons les expressions suivantes :

$$
(3)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\varkappa_1 &= -\frac{(\mathrm{a}+\mathrm{a}'t)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{\Delta V_1},\\
\lambda_1 &= -\frac{(\mathrm{b}+\mathrm{b}'t)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{\Delta V_1},\\
\mu_1 &= -\frac{(\mathrm{c}+\mathrm{c}'t)(\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1)}{\Delta V_1}.
\end{aligned}
\right.
$$

Nous avons posé

$$V_1 = \sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t_1+\mathcal{G}t_1^2};$$

posons de même

$$V_2 = \sqrt{\mathcal{E}+2\mathcal{F}t_2+\mathcal{G}t_2^2},$$

nous aurons, d'après les équations (11) et (8), § II,

$$(4)\qquad V_1V_2=\Delta(t_2-t_1),\quad \frac{\Delta V_1}{\mathcal{F}+\mathcal{G}t_1}=V_2,\quad \frac{\Delta V_2}{\mathcal{F}+\mathcal{G}t_2}=-V_1,$$

et, par suite,

$$(5)\quad \varkappa_1=-\frac{a+a't_2}{V_2},\quad \lambda_1=-\frac{b+b't_2}{V_2},\quad \mu_1=\frac{-(c+c't_2)}{V_2}.$$

On peut tirer de là les valeurs de $\varkappa_2$, λ_2, μ_2 en changeant t_2 en t_1, ce qui donne $-V_1$ au lieu de V_2 :

$$(6)\qquad \varkappa_2=\frac{a+a't_1}{V_1},\quad \lambda_2=\frac{b+b't_1}{V_1},\quad \mu_2=\frac{c+c't_1}{V_1}.$$

Le cosinus de l'angle que forment entre elles les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins aux points limites, a pour valeur :

$$\varkappa_1\varkappa_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2$$
$$=-\frac{(a+a't_1)(a+a't_2)+(b+b't_1)(b+b't_2)+(c+c't_1)(c+c't_2)}{V_1V_2},$$

on obtient en effectuant

$$\varkappa_1\varkappa_2+\lambda_1\lambda_2+\mu_1\mu_2=-\frac{\mathcal{E}+2\mathcal{F}(t_1+t_2)+\mathcal{G}t_1t_2}{V_1V_2}.$$

D'après (6), § II, cette valeur est nulle, donc l'angle est droit. Nous pouvons donc énoncer ce théorème:

Les plus courtes distances d'un rayon aux rayons infiniment voisins pour lesquels on obtient les points limites, sont perpendiculaires entre elles.

Nommons *plans principaux* les plans qui passent par un rayon et sont perpendiculaires aux plus courtes distances de ce rayon aux rayons infiniment voisins qui donnent les points limites. D'après le théorème précédent, ces plans sont rectangulaires. La direction d'une droite perpendiculaire à un rayon sera déterminée quand on connaîtra l'angle qu'elle fait avec un plan passant par ce rayon. On considère les plans principaux d'un rayon comme l'origine des angles de toutes les directions perpendiculaires à ce rayon.

Soit ω l'angle que la direction de la plus courte distance d'un rayon à un rayon infiniment voisin fait avec la direction de la plus courte distance en un des points limites, celui dont l'abscisse est r_1, ou, ce qui revient au même, l'angle complémentaire de cette direction avec le second plan principal, on a

$$(7) \qquad \cos\omega = \varkappa_1 \varkappa + \lambda_1 \lambda + \mu_1 \mu.$$

En mettant dans cette formule les valeurs (2) et (6) de $\varkappa$, λ, μ, $\varkappa_1$, λ_1, μ_1, on a

$$(8) \qquad \cos\omega = -\frac{\mathcal{E} + \mathcal{F} t_1 + t(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1)}{V_1 \sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}},$$

ou bien, en ayant égard à l'équation (6), § II,

$$(9) \qquad \cos\omega = \frac{(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1)(t_2 - t_1)}{V_1 \sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}}.$$

On tire de là

$$(10) \qquad \sin\omega = \frac{\Delta(t - t_1)}{V_1 \sqrt{\mathcal{E} + 2\mathcal{F} t + \mathcal{G} t^2}},$$

$$(11) \qquad \operatorname{tang}\omega = \frac{\Delta(t - t_1)}{(\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1)(t_2 - t)}.$$

et par suite

$$(12) \qquad t = \frac{\Delta t_1 \cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1) t_2 \sin\omega}{\Delta \cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G} t_1) \sin\omega}.$$

Au moyen de cette formule, on peut remplacer t par sa valeur en fonction de l'angle ω qui fixe plus nettement la position d'un rayon par rapport à un rayon infiniment voisin. Faisons cette substitution dans l'expression

$$r = \frac{e + (f + f')t + gt^2}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2}$$

de l'abscisse du point d'un rayon le plus rapproché d'un rayon infiniment voisin, et remarquons que

$$(13)\qquad \mathcal{E} + 2\mathcal{F}t + \mathcal{G}t^2 = \frac{\Delta^2 V_1^2}{[\Delta\cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t)\sin\omega]^2},$$

$$(14)\qquad e + (f + f')t + gt^2$$

$$= \frac{\Delta^2[e + (f + f')t_1 + gt_1^2]\cos^2\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t)[e + (f + f')t_2 + gt_2^2]\sin^2\omega}{[\Delta\cos\omega + (\mathcal{F} + \mathcal{G}t_1)\sin\omega]^2},$$

nous obtiendrons

$$(15)\qquad r = -\frac{[e + (f + f')t_1 + gt_1^2]}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_1 + \mathcal{G}t_1^2}\cos^2\omega$$
$$-\frac{[e + (f + f')t_2 + gt_2^2]}{\mathcal{E} + 2\mathcal{F}t_2 + \mathcal{G}t_2}\sin^2\omega.$$

Si nous avons égard aux formules (12) et (13), § II, la formule précédente devient

$$(16)\qquad r = r_1\cos^2\omega + r_2\sin^2\omega.$$

Cette élégante formule, qui donne une relation si simple entre les plus courtes distances d'un rayon à un rayon infiniment voisin quelconque et les plus courtes distances qui correspondent aux deux points limites du rayon, a été trouvée par Hamilton, dans le supplément de son Mémoire : *On the theory of systems of rays*. Il nomme *virtual foci* les pieds de la plus courte distance de deux rayons infiniment voisins. Il a aussi signalé pour la première fois les points limites et les plans principaux.

(*La suite prochainement.*)