Nouvelles annales de mathématiques

V.-A. Le Besgue

Généralisation d'un théorème de M. M. Roberts

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 63-66

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__63_1>

GENERALISATION D'UN THÉORÈME DE M. M. ROBERTS;

PAR M. V.-A. LE BESGUE.

THÉORÈME. *Soit* ABCD *un tétraèdre dont les aires des faces respectivement opposées aux sommets* A, B, C, D *sont respectivement* a, b, c, d. *Si sur un plan quelconque* P *on abaisse des points* A, B, C, D *les perpendiculaires* a', b', c', d', *positives ou négatives selon qu'elles sont d'un côté du plan ou de l'autre, on aura toujours*

$$W = aa' + bb' + cc' + dd' = 3V \cdot \frac{\rho}{r},$$

en représentant par* V *le volume du tétraèdre, par* r *le rayon de la sphère inscrite, et par* ρ *la distance du plan* P *au centre de la sphère.

Quand le théorème a été prouvé pour $\rho = 0$, c'est-à-dire quand on a montré que la somme $aa' + bb' + cc' + dd'$ est nulle relativement à tous les plans passant par le centre de la sphère inscrite, on trouve tout de suite pour un plan à la distance ρ de ce centre

$$a(a' + \rho) + b(b' + \rho) + c(c' + \rho) + d(d' + \rho)$$
$$= (a + b + c + d)\rho = 3V \cdot \frac{\rho}{r},$$

à cause de

$$3V = (a + b + c + d)r.$$

Pour démontrer le cas de $\rho = 0$, on représentera par a'', b'', c'' les trois arêtes passant par D, de sorte que l'aire a soit comprise entre b'' et c''. Si la perpendiculaire menée par D à la face a fait avec a'' l'angle α_1, on a

$$3V = aa'' \cos \alpha_1,$$

et de même

$$3V = bb'' \cos \beta_1, \qquad 3V = cc'' \cos \gamma_1.$$

Maintenant si l'on prend les arêtes a'', b'', c'' pour axes des coordonnées, et que

$$h = \cos \alpha . x + \cos \beta . y + \cos \gamma . z,$$

soit l'équation du plan P, en représentant par h la perpendiculaire abaissée de l'origine D sur ce plan, et par α, β, γ les angles que cette perpendiculaire fait avec les trois axes, il en résulte que pour avoir les trois autres perpendiculaires abaissées sur le plan P des points A, B, C, il suffit de mener par ces points des plans parallèles à P.

En supposant ces trois perpendiculaires d'un même côté du plan, la perpendiculaire h étant de l'autre côté, les trois perpendiculaires de même signe sont

$$a'' \cos\alpha - h,\quad b'' \cos\beta - h,\quad c'' \cos\gamma - h,$$

et faisons

$$\begin{aligned} W = {} & (a'' \cos\alpha - h)\, a + (b'' \cos\beta - h)\, b \\ & + (c'' \cos\gamma - h) c - dh, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} W = {} & aa'' \cos\alpha_1 \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} + bb'' \cos\beta_1 \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1} \\ & + cc'' \cos\gamma_1 \cdot \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} - (a+b+c+d)\, r \cdot \frac{h}{r}, \end{aligned}$$

ou encore

$$W = 3V \left\{ \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} + \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1} + \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} - \frac{h}{r} \right\}.$$

Or les coordonnées du centre de la sphère sont respectivement

$$\frac{r}{\cos\alpha_1},\quad \frac{r}{\cos\beta_1},\quad \frac{r}{\cos\gamma_1}.$$

Si ce point est sur le plan

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - h = 0,$$

on a donc

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\alpha_1} + \frac{\cos\beta}{\cos\beta_1} + \frac{\cos\gamma}{\cos\gamma_1} - \frac{h}{r} = 0, \quad \text{d'où} \quad W = 0.$$

La démonstration ne change pas pour le triangle; seulement a, b, c, représentant les côtés, et la surface étant S, on obtient

$$aa'' + bb'' + cc'' = 2S \cdot \frac{\rho}{r},$$

pour $\rho = 0$ on a

$$aa'' + bb'' + cc'' = 0,$$

pour $\rho = r$ on a

$$aa'' + bb'' + cc'' = 2S,$$

c'est là le théorème de M. Michael Roberts ; alors la droite variable dans le plan du triangle est toujours tangente au cercle inscrit dans ce triangle.