Questions d'examen

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 5-6

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__5_0>

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

QUESTIONS D'EXAMEN;

PAR UN PROFESSEUR.

Soit proposé de trouver le lieu des points pour lesquels deux normales à une conique font un angle donné.

Comme par un point donné on peut mener plus de deux normales à une conique, il suffira de remarquer que l'angle des tangentes étant égal à celui des normales, ou bien supplémentaire, il sera facile de déduire le lieu demandé, du lieu formé par les points d'où l'on peut mener à une conique deux tangentes faisant un angle donné, et l'on reconnaîtra tout de suite que dans les deux cas l'équation appartient à un angle donné ou à son supplément.

Pour le problème des tangentes, si, le point du lieu étant (α, β), on élimine y entre l'équation de la conique et celle de la droite $y - \beta = t(x - \alpha)$, en exprimant que les valeurs de x sont égales, on obtiendra une équation

$$Pt^2 + Qt + R = 0,$$

où P, Q, R sont fonctions de α et β. L'équation du lieu sera, en représentant par t_1, t_2 les coefficients angulaires des deux tangentes et par m la tangente de leur angle,

$$\frac{t_1 - t_2}{1 + t_1 t_2} = m,$$

ou encore, en faisant disparaître le radical de

$$t_1 - t_2 = \frac{\sqrt{Q^2 - 4PR}}{P},$$

$$Q^2 - 4PR = m^2(P + R)^2, \tag{1}$$

de sorte que l'équation ne changeant pas avec le signe de m, elle convient à des angles supplémentaires.

Comme on peut déterminer les coefficients angulaires des normales $-\frac{1}{t_1}$, $-\frac{1}{t_2}$ en α et β, et de même les coordonnées des points de contact des tangentes, on aura deux équations (2), (3) en α, β, X et Y en représentant par (X, Y) le point de croisement des normales.

L'élimination de α et β entre (1), (2) et (3) donnera le lieu. Pour la parabole le calcul est assez simple, l'élimination de β conduira à deux équations de forme

$$\alpha^3 + L\alpha^2 + M = 0, \quad \alpha^2 + N\alpha + O = 0,$$

où L, M, N, O sont des fonctions de X et Y, et l'on tombera sur une équation du quatrième degré.

L'élimination est probablement plus longue pour le cas des coniques à centre.

M. Serret a proposé le cas de la parabole et de l'angle dont la tangente $m = 1$.