DARBOUX

Solution de la question 537

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 458-464

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__458_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 537

(voir t. XIX, p. 307);

PAR M. DARBOUX,
Élève du lycee de Montpellier.

Discuter la surface donnée par l'équation polaire

$$(A) \qquad \rho^3 (3 \sin^2\theta \cos^2\psi + m \sin^2\theta - 1) = a^3.$$

Il est évident, avant toute discussion, que la surface admet l'origine pour centre et les plans coordonnés pour plans de symétrie. En effet, si l'on change θ en $\pi \pm \theta$, ψ en $\pi \pm \psi$ ou $2\pi \pm \psi$, l'équation n'est pas altérée.

Cela posé, je remarque que la surface A peut être considérée comme le lieu des intersections des deux surfaces

$$(1)\qquad \begin{cases} \rho = ak, \\ 3\rho^2 \sin^2\theta \cos^2\psi + m\rho^2 \sin^2\theta - \rho^2 = \dfrac{a^2}{k}, \end{cases}$$

quand on fait varier k. Passons aux coordonnées ordinaires; les équations des deux surfaces deviendront

$$(2)\qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 k^2, \\ (2+m)x^2 + (m-1)y^2 - z^2 = \dfrac{a^2}{k}, \end{cases}$$

ce qui montre que le lieu peut être obtenu par l'intersection d'une série de sphères avec une série de surfaces du second degré restant constamment semblables à elles-mêmes. Mais on peut remplacer ces dernières surfaces par les cônes compris dans l'équation générale

$$(3)\quad \left(2 + m - \frac{1}{k^3}\right) x^2 + \left(m - 1 - \frac{1}{k^3}\right) y^2 - \left(1 + \frac{1}{k^3}\right) z^2 = 0.$$

Les intersections des sphères et des cônes correspondants qui sont homocycliques, donneront une série de coniques sphériques toutes situées sur la surface. Quand le cône sera réel, il coupera toujours la sphère, mais il est facile de s'assurer qu'il y aura des valeurs de k pour lesquelles il sera imaginaire.

En effet supposons, pour plus de simplicité, m positif; pour k très-voisin de zéro, le cône est imaginaire et il ne devient réel que lorsque $m + 2 = \frac{1}{k^3}$. Il se réduit alors à l'axe des x, et l'intersection de la sphère avec cet axe donne les points de la surface les plus rapprochés du centre.

Quand on fait croître k positivement, le rayon de la sphère croît, le cône se développe. Pour $\frac{1}{k^3} = m - 1$, il se réduit à deux plans passant par l'axe des y et coupant la surface suivant deux cercles

$$3x^2 - mz^2 = 0.$$

Ainsi on peut placer deux cercles sur la surface.

Si k augmente indéfiniment, le rayon de la sphère croît sans limite et l'équation du cône tend vers la suivante

$$(2 + m) x^2 + (m - 1) y^2 - z^2 = 0,$$

qui représente par conséquent le cône asymptote de la surface A.

Si entre les équations (2) on élimine k, on aura l'équation en coordonnées rectilignes

$$(x^2 + y^2 + z^2) [(2 + m) x^2 + (m - 1) y^2 - z^2]^2 = a^6.$$

L'équation du plan tangent au point x', y', z' est

$$2k^3 \left[(2 + m) xx' + (m - 1) yy' - zz' - \frac{a^2}{k} \right]$$
$$+ xx' + yy' + zz' - a^2 k^2 = 0.$$

On voit qu'il passe par l'intersection des plans tangents aux deux surfaces du second degré.

M. le Rédacteur indique dans l'énoncé un point singulier où il y aurait un cône de tangentes ; il est clair que pour ce point l'équation du plan tangent devrait être identiquement vérifiée. Or le terme indépendant

$$3a^2 k^2$$

ne pourrait être nul que si l'on avait

$$k = 0, \quad \text{d'où} \quad x' = 0, \quad y' = 0, \quad z' = 0,$$

ce qui est absurde. Il semble donc qu'il n'y a pas de point singulier.

Autre méthode de discussion.

Supposons, pour plus de simplicité, que la constante a soit égale à l'unité, ce qui ne changera pas la forme de la surface; alors si dans l'équation

$$\rho^3 (3 \sin^2\theta \cos^2\psi + m \sin^2\theta - 1) = 1$$

on change ρ^3 en r^2 ou ρ en $r^{\frac{2}{3}}$, on obtiendra une équation du second degré entre les coordonnées r, θ, φ :

$$(\mathrm{B}) \quad \left\{ \begin{array}{l} r^2 (3 \sin^2\theta \cos^2\psi + m \sin^2\theta - 1) = 1, \\ (m+2)\, x^2 + (m-1)\, y^2 - z^2 = 1. \end{array} \right.$$

Ainsi la surface jouit de cette propriété que ses rayons sont égaux à ceux de la surface B du second degré élevés à la puissance $\frac{2}{3}$.

Dans le cas où la surface B est un ellipsoïde, tous les rayons de la surface sont finis, elle a à peu près la forme de l'ellipsoïde et elle le coupe suivant la courbe obtenue en faisant $\rho = 1$.

Pour $m = -2$, la surface du second degré est un cylindre imaginaire, et la surface présente la propriété d'être asymptote à l'axe des x.

A cet effet, remarquons que lorsque l'équation du second degré donnera pour r^2 des valeurs négatives, comme dans le cas des hyperboloïdes, il n'y aura pas alors de point réel de la surface du second degré correspondant à ces valeurs, au lieu que le rayon $\rho = \sqrt[3]{r^2}$, devenu négatif, donnera encore des points de la surface à discuter A. Dans ce cas, on considérera, en même temps que l'hyperboloïde B, l'hyperboloïde conjugué, et on portera les rayons de la surface A en sens contraire de ceux de cet hyperboloïde conjugué. Ces remarques vont nous donner une idée nette de la surface et nous permettre d'en compléter la discussion.

Pour $m > -2$, on obtient un hyperboloïde A auquel il faut joindre le conjugué.

Pour $m = 1$, la surface A devient asymptote aux deux plans

$$3x^2 - z^2 = 0$$

et se déduit du cylindre hyperbolique

$$3x^2 - z^2 = 1.$$

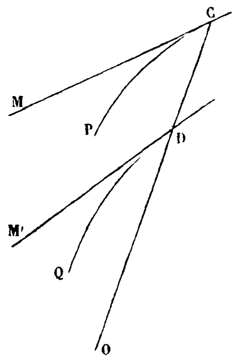
La discussion des sections planes passant par le centre achèvera de faire connaître la forme de la surface. En effet, tout plan passant par le centre donnera dans la surface du second degré une conique, et si l'on porte sur tous les rayons de cette conique des longueurs égales à leurs puissances $\frac{2}{3}$, on aura la courbe d'intersection avec la surface discutée.

Si le plan sécant donne dans la surface du second degré une section hyperbolique, on aura dans la surface A une section à deux branches infinies ayant mêmes asymptotes que l'hyperbole.

Si le plan sécant donne une section parabolique, on aura dans la surface A une courbe à une seule branche infinie.

Enfin les plans des sections elliptiques donneront des courbes fermées, et en particulier si l'on prend les plans des sections circulaires, on aura encore des cercles dans la surface A.

Soit MCO un plan passant par le centre, soient CP la section de la surface du second degré et DQ la section de la surface A, soit μ la tangente de l'angle que fait la tan-



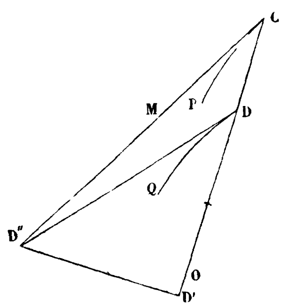
gente CM avec OC, soit μ' l'angle correspondant M'DO. On aura

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{r}{r'}, \quad \operatorname{tang}\mu' = \frac{\rho}{\rho'},$$

et, d'après la relation $r = \rho^{\frac{2}{3}}$,

$$\operatorname{tang}\mu' = \frac{3}{2}\operatorname{tang}\mu.$$

Il sera donc facile de construire la tangente à la courbe



DQ au point D. Il suffira de prendre DD' $= 2$CD et d'élever en D' jusqu'à la rencontre de la tangente CMD'' une perpendiculaire; en joignant DD'', on aura la tangente en D.

En construisant deux tangentes, on aura ainsi le plan tangent par une simple construction géométrique.

Enfin imaginons que l'on considère trois directions conjuguées de la surface du second degré ou du cône asymptote. On sait que la somme des carrés des diamètres conjugués reste constante. De même on sait que la somme des carrés des inverses de trois diamètres rectangulaires est constante. On en déduit relativement à la surface discutée les théorèmes suivants :

Si l'on mène trois directions conjuguées dans le cône asymptote de la surface, la somme des cubes des rayons de la surface correspondant à ces directions sera constante.

Si l'on mène trois directions rectangulaires, la somme des inverses des cubes des rayons correspondant à ces directions est constante.