NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

H. DURRANDE

Sur la surface (4e degré) des ondes de Fresnel

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 456-458
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__456_1>

SUR LA SURFACE (4^e DEGRÉ) DES ONDES DE FRESNEL;

PAR M. H. DURRANDE,
Professeur à Agen.

Étant donnée une surface du second ordre à centre, représentée par l'équation

$$(1)\qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

on la coupe par une sphère concentrique

$$(2)\qquad x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$$

on obtient une conique sphérique située sur le cône

$$(3)\qquad \left(A - \frac{1}{R^2}\right)x^2 + \left(B - \frac{1}{R^2}\right)y^2 + \left(C - \frac{1}{R^2}\right)z^2 = 0.$$

A chacune des coniques sphériques situées sur la surface (1), correspond évidemment une conique sphérique supplémentaire située sur la même sphère.

Cela admis, si l'on suppose qu'on fasse varier R, on demande quel est le lieu des coniques sphériques supplémentaires de celles comprises dans le système des équations

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=R^2,\\ &\left(A-\frac{1}{R^2}\right)x^2+\left(B-\frac{1}{R^2}\right)y^2+\left(C-\frac{1}{R^2}\right)z^2=0. \end{aligned}\right.$$

Les équations de la conique supplémentaire représentée par le système (4) pour une valeur particulière de R se trouvent aisément, en remarquant que cette courbe est l'intersection de la sphère R par le cône supplémentaire de celui qui est représenté par la seconde des équations (4). Donc les équations d'une conique supplémentaire seront

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &x^2+y^2+z^2=R^2,\\ &\frac{x^2}{A-\frac{1}{R^2}}+\frac{y^2}{B-\frac{1}{R^2}}+\frac{z^2}{C-\frac{1}{R^2}}=0. \end{aligned}\right.$$

Pour avoir l'équation du lieu de ces coniques, il suffit d'éliminer le paramètre variable R, ce qui donne

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &(x^2+y^2+z^2)(BCx^2+ACy^2+ABz^2)\\ &-(B+C)x^2-(C+A)y^2-(A+B)z^2+1=0, \end{aligned}\right.$$

équation du quatrième degré que l'on peut discuter et qui représente des surfaces présentant de grandes analogies avec les surfaces du second ordre.

Il est facile de voir que l'équation (6) comprend comme cas particulier l'équation de la surface des ondes de Fresnel.

En effet si l'on fait dans l'équation (6) $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $C = \frac{1}{c^2}$, ce qui revient à supposer que l'on parte d'un ellipsoïde, on trouve l'équation

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x^2 + y^2 + z^2)(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) \\ & - a^2 (b^2 + c^2) x^2 - b^2 (a^2 + c^2) y^2 - c^2 (a^2 + b^2) z^2 \\ & + a^2 b^2 z^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

qui est l'équation bien connue de la surface des ondes de Fresnel.

Il semble que dans une étude purement géométrique de la surface des ondes, on pourrait prendre la propriété précédente comme définition de la surface. Elle représente d'ailleurs, si je ne me trompe, la liaison la plus intime entre la surface des ondes et la surface du second ordre d'où on la déduit.