Nouvelles annales de mathématiques

Démonstration du théorème Desargues

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 449-452

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__449_1>

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DESARGUES

(voir page 94)

Soit le cercle à centre O, ayant pour équation

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Sur l'axe des y prenons un point quelconque R; posons

$$\mathrm{OR} = a;$$

prenons sur l'axe des y

$$\mathrm{OA} = \frac{r^2}{a}.$$

Menant par A une parallèle à l'axe des x, elle est la polaire du point R. Menons par R une *seconde* parallèle à l'axe des x.

Par un point quelconque M (coord. x', y') du cercle, menons la tangente MNP rencontrant la polaire en P et la seconde parallèle en N; prenons sur cette seconde parallèle un point Q tel, que l'on ait

$$RN . RQ = m^2;$$

m est une longueur donnée, de sorte que N et Q font partie d'une involution sur la seconde parallèle, le point M variant.

S est le point où la transversale MQ rencontre la polaire;

$$yy' + xx' = r^2,$$

équation de la tangente; d'où l'on déduit

$$RN = \frac{r^2 - ay'}{x'},$$

$$RQ = \frac{m^2 x'}{r^2 - ay'},$$

$$AP = \frac{r^2 (a - y')}{ax'}.$$

L'équation de la droite MQS est

$$(x - x')(a - y')(r^2 - ay') = (y - x')x'(m^2 - r^2 + ay'),$$

d'où l'on tire

$$AS = \frac{x'(m^2 - r^2 + a^2)}{a(a - y')},$$

$$AS . AP = \frac{r^2 (m^2 - r^2 + a^2)}{a^2},$$

quantité constante; donc P et S sont en involution sur la polaire. Les pôles, polaires, tangentes, involution restent tels en projection; donc la proposition subsiste pour une conique quelconque.

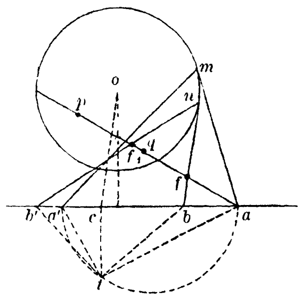
Dernière partie du théorème, démontrée par
M. Poudra.

Nous prenons le cas général et les notations de la page 94.

Nous supposons que le sommet t du cône soit rabattu sur le plan du papier ; puisque

$$ct = ca.ca' = cb.cb' = \ldots,$$

il s'ensuit que les droites ta, ta', etc., tb, tb', etc., sont



rectangulaires, et elles sont parallèles à celles qui sont les perspectives des droites correspondantes ma, ma', etc., nb, nb', etc., puisque le plan sécant doit être parallèle à celui du sommet et dont le terme est aa', etc.

Maintenant considérons, en un point quelconque n de la courbe, les quatre droites nf, nf_1, np, nq (*) ; elles forment toujours un faisceau harmonique, puisque les quatre points f, f_1, p, q forment un rapport harmonique.

Or dans la perpective les deux droites nfb, nfb' deviennent rectangulaires, et comme les quatre droites nf, nf_1, np, nq donnent en perspective quatre droites formant un faisceau harmonique, il faut que les droites correspondantes à celles np, nq soient des bissectrices des angles des premiers. Ainsi dans la figure qui résultera

(*) Le point q est le même que le point t de la ligne 16 en descendant de la page 94. TM.

de la perspective du cercle, nous aurons une tangente, une normale et les deux bissectrices, et ces deux dernières iront passer par les points fixes qui seront les perspectives de ceux p et q; par conséquent ces points seront les foyers de la courbe.