Nouvelles annales de mathématiques

E. Combette

Ch. Kessler

Solution de la question 566

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 439-440

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__439_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 566

(voir p. 111);

PAR M. E. COMBETTE,
Élève du lycée de Versailles,

ET M. CH. KESSLER,
Élève du lycée Saint-Louis.

Soit $D^n \operatorname{tang}\varphi$ la dérivée d'ordre n de $\operatorname{tang}\varphi$, on a l'équation symbolique

$$D^n \operatorname{tang}\varphi = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$D^n \operatorname{tang}\varphi = D^{n-1} D^0 + (n-1) D^{n-2} D^1 + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} D^{n-3} D^2 + \ldots,$$

équation dans laquelle on suppose

$$D^0 = \operatorname{tang}\varphi.$$

Solution. On a

$$D^1 = 1 + \operatorname{tang}^2\varphi,$$

d'où

$$D^2 = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

ou bien

$$D^2 = 2 D^1 D^0.$$

Prenons la dérivée dans les deux membres, il viendra

$$D^3 = 2 D^2 D^0 + 2 D^1 D^1,$$

ce qui peut s'écrire

$$D^3 = D^2 D^0 + 2 D^1 D^1 + D^0 D^1$$

ou symboliquement

$$D^3 = (D^1 + D^0)^{3-1}.$$

La loi sera donc démontrée si je fais voir qu'en accordant l'équation

$$D^n = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

on aura aussi

$$D^{n+1} = (D^1 + D^0)^n.$$

Admettons donc que l'on ait la formule suivante

$$D^n = C_0^{n-1} D^{n-1} D^0 + C_1^{n-1} D^{n-2} D^1 + C_2^{n-1} D^{n-3} D^2$$
$$+ C_3^{n-1} D^{n-4} D^3 + C_4^{n-1} D^{n-5} D^4 + \ldots.$$

Or prenons la dérivée dans les deux membres, il viendra

$$D^{n+1} = C_0^{n-1} D^n D^0 + \left.\begin{array}{r} C_0^{n-1} \\ + C_1^{n-1} \end{array}\right| D^{n-1} D^1 + \left.\begin{array}{r} C_1^{n-1} \\ + C_2^{n-1} \end{array}\right| D^{n-2} D^2 + \left.\begin{array}{r} C_2^{n-1} \\ + C_3^{n-1} \end{array}\right| D^{n-3} D^3 + \left.\begin{array}{r} C_3^{n-1} \\ + C_4^{n-1} \end{array}\right| D^{n-4} D^4 + \ldots.$$

Donc, en vertu du théorème

$$C_n^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m,$$

on aura

$$D^{n+1} = C_0^n D^n D^0 + C_1^n D^{n-1} D^1 + C_2^n D^{n-2} D^2 + C_3^n D^{n-3} D^3 + \ldots.$$

On peut donc écrire symboliquement

$$D^{n+1} \operatorname{tang} \varphi = (D^1 + D^0)^n.$$

Par suite, il est démontré que la loi énoncée est générale.