

E. COMBETTE

CH. KESSLER

Solution de la question 566

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 439-440

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__439_1

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SOLUTION DE LA QUESTION 566

(voir p. 111);

PAR M. E. COMBETTE,

Élève du lycée de Versailles,

ET M. CH. KESSLER,

Élève du lycée Saint-Louis.

Soit $D^n \operatorname{tang} \varphi$ la dérivée d'ordre n de $\operatorname{tang} \varphi$, on a l'équation symbolique

$$D^n \operatorname{tang} \varphi = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

c'est-à-dire

$$D^n \operatorname{tang} \varphi = D^{n-1} D^0 + (n-1) D^{n-2} D^1 \\ + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} D^{n-3} D^2 + \dots,$$

équation dans laquelle on suppose

$$D^0 = \operatorname{tang} \varphi.$$

Solution. On a

$$D^1 = 1 + \operatorname{tang}^2 \varphi,$$

d'où

$$D^2 = 2 \operatorname{tang} \frac{1}{\cos^2 \varphi},$$

ou bien

$$D^2 = 2 D^1 D^0.$$

Prenons la dérivée dans les deux membres, il viendra

$$D^3 = 2 D^2 D^0 + 2 D^1 D^1,$$

ce qui peut s'écrire

$$D^3 = D^2 D^0 + 2 D^1 D^1 + D^0 D^3$$

ou symboliquement

$$D^3 = (D^1 + D^0)^3 - 1.$$

La loi sera donc démontrée si je fais voir qu'en accordant l'équation

$$D^n = (D^1 + D^0)^{n-1},$$

on aura aussi

$$D^{n+1} = (D^1 + D^0)^n.$$

Admettons donc que l'on ait la formule suivante

$$\begin{aligned} D^n = & C_0^{n-1} D^{n-1} D^0 + C_1^{n-1} D^{n-2} D^1 + C_2^{n-1} D^{n-3} D^2 \\ & + C_3^{n-1} D^{n-4} D^3 + C_4^{n-1} D^{n-5} D^4 + \dots \end{aligned}$$

Or prenons la dérivée dans les deux membres, il viendra

$$D^{n+1} = C_0^{n-1} D^n D^0 + C_0^{n-1} \left| D^{n-1} D^1 + C_1^{n-1} \left| D^{n-2} D^2 + C_2^{n-1} \left| D^{n-3} D^3 + C_3^{n-1} \left| D^{n-4} D^4 + \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + C_1^{n-1} \right| \right. \right. \left. \left. \left. + C_2^{n-1} \right| \right. \right. \left. \left. \left. + C_3^{n-1} \right| \right. \right. \left. \left. \left. + C_4^{n-1} \right| \right. \right. \left. \right.$$

Donc, en vertu du théorème

$$C_n^{m+1} = C_n^m + C_{n-1}^m,$$

on aura

$$D^{n+1} = C_0^n D^n D^0 + C_1^n D^{n-1} D^1 + C_2^n D^{n-2} D^2 + C_3^n D^{n-3} D^3 + \dots$$

On peut donc écrire symboliquement

$$D^{n+1} \text{ tang } \varphi = (D^1 + D^0)^n.$$

Par suite, il est démontré que la loi énoncée est générale.