Nouvelles annales de mathématiques

Darboux

Seconde solution de la question 503

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 436-438

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__436_0>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 503

(voir p. 353);

PAR M. DARBOUX,
Élève du lycée de Montpellier.

Déterminer les six racines rationnelles de l'équation

$$(a^5 - a)^4 (x^2 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x (x - 1)^4.$$

(ABEL.)

L'équation proposée est réciproque. En effet, on peut l'écrire

$$\frac{\left[a^4 + \frac{1}{a^4} + 14\right]^3}{\left[a^4 + \frac{1}{a^4} - 2\right]^2} = \frac{\left[x + \frac{1}{x} + 14\right]^3}{\left[x + \frac{1}{x} - 2\right]^2}.$$

Pour la résoudre, posons

$$x + \frac{1}{x} - 2 = 16y^3,$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} - 2 = 16b^3;$$

nous aurons en substituant

$$\frac{y^3 + 1}{y^2} = \frac{b^3 + 1}{b^2}.$$

Cette équation a une première solution

$$y = b$$

qui donne

$$x = a^4,$$

$$x = \frac{1}{a^4}.$$

Supprimant cette solution, il vient

$$b^2 y^2 = b + y,$$

d'où l'on déduit y et par suite $16y^3$:

$$16y^3 = 64 \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}.$$

Mais on a

$$16y^3 = x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,$$

on en déduit

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 8 \frac{a + \frac{1}{a}}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2},$$

d'où

$$x = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4.$$

Remarquons maintenant que les coefficients de l'équation proposée ne dépendent en réalité que de a^4, en sorte que l'expression précédente de x a quatre valeurs qu'on obtiendra en mettant à la place de a toutes les valeurs de

$$\sqrt[4]{a^4}, \quad a, \quad -a, \quad a\sqrt{-1}, \quad -a\sqrt{-1}.$$

On trouve ainsi

$$x = \left(\frac{1+a}{1-a}\right)^4, \qquad x = \left(\frac{2-a}{1+a}\right)^4,$$

$$x = \left(\frac{1+a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}}\right)^4, \quad x = \left(\frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}}\right)^4,$$

Ces racines sont deux à deux réciproques.