

DARBOUX

Seconde solution de la question 503

Nouvelles annales de mathématiques 1^{re} série, tome 20
(1861), p. 436-438

http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__436_0

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SECONDE SOLUTION DE LA QUESTION 503

(voir p. 353);

PAR M. DARBOUX,
Élève du lycée de Montpellier.

Déterminer les six racines rationnelles de l'équation

$$(a^3 - a)^4 (x^2 + 14x + 1)^3 = (a^8 + 14a^4 + 1)^3 x(x-1)^4.$$

(ABEL.)

L'équation proposée est réciproque. En effet, on peut l'écrire

$$\frac{\left[a^4 + \frac{1}{a^4} + 14 \right]^3}{\left[a^4 + \frac{1}{a^4} - 2 \right]^2} = \frac{\left[x + \frac{1}{x} + 14 \right]^3}{\left[x + \frac{1}{x} - 2 \right]^4}.$$

Pour la résoudre, posons

$$x + \frac{1}{x} - 2 = 16y^3,$$

$$a^4 + \frac{1}{a^4} - 2 = 16b^3;$$

nous aurons en substituant

$$\frac{y^3 + 1}{y^2} = \frac{b^3 + 1}{b^2}.$$

Cette équation a une première solution

$$y = b$$

(437)

qui donne

$$x = a^4,$$

$$x = \frac{1}{a^4}.$$

Supprimant cette solution, il vient

$$b^2 y^2 = b + y,$$

d'où l'on déduit y et par suite $16y^3$:

$$16y^3 = 64 \frac{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2}.$$

Mais on a

$$16y^3 = x + \frac{1}{x} - 2 = \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2,$$

on en déduit

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 8 \frac{a + \frac{1}{a}}{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2},$$

d'où

$$x = \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^4.$$

Remarquons maintenant que les coefficients de l'équation proposée ne dépendent en réalité que de a^4 , en sorte que l'expression précédente de x a quatre valeurs qu'on obtiendra en mettant à la place de a toutes les valeurs de

$$\sqrt[4]{a^4}, \quad a, \quad -a, \quad a\sqrt{-1}, \quad -a\sqrt{-1}.$$

On trouve ainsi

$$x = \left(\frac{1+a}{1-a} \right)^4, \quad x = \left(\frac{2-a}{1+a} \right)^4,$$

$$x = \left(\frac{1+a\sqrt{-1}}{1-a\sqrt{-1}} \right)^4, \quad x = \left(\frac{1-a\sqrt{-1}}{1+a\sqrt{-1}} \right)^4,$$

Ces racines sont deux à deux réciproques.