LAQUIÈRE

Solution géométrique de la question 395

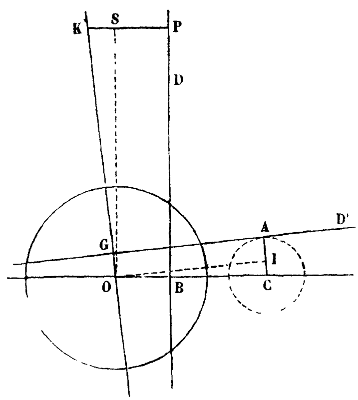
Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 42-43
<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__42_0>

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION 395

(voir t. XVI, p. 312);

PAR M. LAQUIÈRE,
Élève du lycée Saint-Louis.

THÉORÈME. *La polaire réciproque d'un cercle* C *relativement à un cercle de centre* O *est une conique de foyer* O, *ayant pour sa directrice la polaire du centre* C *par rapport au cercle directeur* O.



Démonstration. Soit D la polaire du point C, on aura la relation segmentaire

$$OB.OC = R^2,$$

où R est le rayon du cercle O.

Soient D' une tangente au cercle C; K son pôle par rapport à O, on aura de même

$$OG.OK = R^2.$$

Soit KP perpendiculaire sur D, je dis que

$$\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{KO}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}}=\frac{r}{d};$$

$r =$ rayon du cercle C, $d =$ distance des centres.

En effet, les triangles semblables KOS, IOC donnent

$$\frac{\mathrm{KS}}{\mathrm{KO}}=\frac{\mathrm{CI}}{\mathrm{CO}};$$

d'ailleurs

$$\frac{\mathrm{SP}}{\mathrm{KO}}=\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{CO}},$$

donc par addition

$$\frac{\mathrm{KP}}{\mathrm{KO}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}}.$$

Le théorème est donc démontré.

Analytiquement :

Cercle O..... $r^2 + y^2 = \mathrm{R}^2$,
Cercle C..... $(x - d)^2 + y^2 = r^2$.

La distance au point C de la polaire du point (x, y) est r ; d'où

$$\frac{dx - \mathrm{R}^2}{\sqrt{r^2 + y^2}} = r, \qquad x^2 + y^2 = \frac{1}{r^2}(dx - \mathrm{R}^2)^2.$$

Note de M. de Jonquières. Cette question est traitée assez longuement dans mes *Mélanges de Géométrie,* p. 68 et suiv. On transforme ainsi les propriétés relatives à deux cercles en des propriétés d'un énoncé très-différent concernant des coniques biconfocales. Il y a longtemps que cette remarque a été faite par M. Poncelet, l'illustre créateur de la théorie des *polaires réciproques*. Par exemple, le théorème (Faure), question 358 (t. XVI, p. 58), n'est autre chose que le théorème qui fait l'objet du n° 733 de la *Géométrie supérieure,* transformé par cette méthode.