Nouvelles annales de mathématiques

Baehr

Propriété de coefficients du binôme et théorème Sylvester sur les déterminants

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 417-420

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__417_0>

PROPRIÉTE DES COEFFICIENTS DU BINOME ET THEORÈME SYLVESTER SUR LES DÉTERMINANTS ;

PAR M. BAEHR,
Professeur à Groningue.

I. Soit l'identité

$$(1) \qquad \sum_{m=0}^{m=p} (-1)^m A_m x^m (1-x)^{p-m} = \sum A'_m x^m, \ldots,$$

où les coefficients A au premier membre sont tout à fait arbitraires et indépendants entre eux. Désignant les coefficients du développement de $(a+b)^q$ de la manière suivante

$$1 = \binom{q}{0}, \quad \frac{q}{1} = \binom{q}{1}, \quad \frac{q(q-1)}{1.2} = \binom{q}{2}, \ldots,$$

$$\frac{q(q-1)\ldots(q-m+1)}{1.2\ldots m} = \binom{q}{m} = \binom{q}{q-m},$$

on aura

$$(a) \qquad A'_{p-m} = (-1)^{p-m} \sum_{\mu} \binom{\mu}{m} A_{p-\mu}, \ldots.$$

Si dans l'équation (1) on change x en $-\frac{x}{1-x}$, et par conséquent $1-x$ en $\frac{1}{1-x}$, et si l'on multiplie ensuite les deux membres par $(1-x)^p$, elle devient

$$\sum A_m x^m = \sum (-1)^m A'_m x^m (1-x)^{p-m},$$

de sorte que l'on a réciproquement

$$(b) \qquad A_{p-m} = (-1)^{p-m} \sum_{\mu} \binom{\mu}{m} A'_{p-\mu}, \ldots \, .$$

Changeant dans l'équation (1) x en $1-x$, elle devient

$$\sum (-1)^m A_m x^{p-m} (1-x)^m = \sum A'_m (1-x)^m,$$

et, égalisant les coefficients de x^{p-m} dans les deux membres, on obtient encore

$$(c) \; (-1) \sum_{\mu=0}^{\mu=p-m} \binom{p-\mu}{m} A_{p-\mu} = \sum_{\mu=0}^{\mu=m'} \binom{p-\mu}{p-m} A'_{p-\mu}.$$

Eliminant A' entre (a) et (b) et ensuite entre (a) et (c), on aura les deux identités

$$A_{p-m} = (-1)^m \sum_n \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{m} A_{p-n}$$

et

$$\sum \binom{p-\mu}{m} A_{p-\mu} = \sum_n \sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{p-\mu}{p-m} A_{p-n},$$

où l'on peut se passer de marquer les limites des variables n et μ, parce que le symbole $\binom{q}{m}$ est zéro lorsque la valeur de la variable est en dehors de ses limites.

La première de ces deux formules donne

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{\mu}{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n \gtrless m, \\ (-1)^m, & \text{si } n = m, \end{cases}$$

et la seconde

$$\sum_{\mu} (-1)^{\mu} \binom{n}{\mu} \binom{p-\mu}{p-m} = \binom{p-n}{m} = \begin{cases} 0, & \text{si } n > p-m, \\ 1, & \text{si } n = p-m. \end{cases}$$

Ainsi l'on a par exemple, faisant $n = 8$, $m = 4$, $p = 14$,

$$\sum_\mu (-1)^\mu \binom{8}{\mu}\binom{\mu}{4}$$

$$= 70.1 - 56.5 + 28.15 - 8.35 + 1.70 = 0,$$

$$\sum_\mu (-1)^\mu \binom{8}{\mu}\binom{14-\mu}{10}$$

$$= 1.1001 - 8.286 + 28.66 - 56.11 + 70.1 = 15$$

$$= \binom{6}{4} = \binom{6}{2},$$

et faisant $n = 10 = p - m$ et $n = 12 > p - m$,

$$\sum (-1)^\mu \binom{10}{\mu}\binom{14-\mu}{10}$$

$$= 1.1001 - 10.286 + 45.66 - 120.11 + 210.1 = 1,$$

$$\sum (-1)^\mu \binom{12}{\mu}\binom{14-\mu}{10}$$

$$= 1.1001 - 12.286 + 66.66 - 220.11 + 495.1 = 0.$$

II. Le théorème de M. Sylvester sur le déterminant Δ (Brioschi, traduction de M. Combescure, p. 33) peut aussi facilement se déduire des plus simples propriétés des déterminants, sans qu'on ait recours à leur multiplication. Premièrement on voit aisément que la valeur de Δ ne change pas, si, exceptant les éléments de la dernière colonne et ceux de la dernière ligne, on ajoute aux éléments d'une même ligne la même quantité h_2; car on a successivement

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}+h_1 & a_{1,2}+h_1 & \ldots & a_{1,n}+h_1 & 1 \\ a_{2,1}+h_2 & a_{2,2}+h_2 & \ldots & a_{2,n}+h_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}+h_n & a_{n,2}+h_n & \ldots & a_{n,n}+h_n & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1}+h_1 & a_{1,2}-a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}-a_{1,1} & 1 \\ a_{2,1}+h_2 & a_{2,2}-a_{2,1} & \ldots & a_{2,n}-a_{2,1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1}+h_n & a_{n,2}-a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}-a_{n,1} & 1 \\ 1+0 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2}-a_{1,1} & \ldots & a_{1,n}-a_{1,1} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2}-a_{2,n} & \ldots & a_{2,1}-a_{2,1} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2}-a_{n,1} & \ldots & a_{n,n}-a_{n,1} & 1 \\ 1 & 0 & & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & 1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,n} & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = \Delta;$$

il en sera de même lorsqu'on ajoute, sous la même restriction, aux éléments d'une même colonne la même quantité k_s; donc, en faisant les deux substitutions l'une après l'autre, on obtiendra $\Delta = H$.