NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

Notes sur quelques questions d'examen (École polytechnique) (voir p. 396)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 401-416

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__401_0>

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS D'EXAMEN (ECOLE POLYTECHNIQUE)

(voir p. 386).

III.

Quand l'équation F(x, y, z) = 0 *du second degré représente un paraboloïde hyperbolique, l'équation homogène que l'on obtient en égalant à zéro l'assemblage des termes du second degré de* F(x, y, z), *représente le système de deux plans directeurs de ce paraboloïde.*

Par la transformation des coordonnées, l'équation

$$(1)\qquad F(x, y, z) = 0$$

se réduit à

$$(2)\qquad p^2x^2 - p'^2y^2 - qz = 0.$$

Et, dans ce nouveau système, l'équation

$$p^2x^2 - p'^2y^2 = 0$$

détermine deux plans directeurs.

En revenant aux coordonnées primitives, l'équation (2) devient

$$p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(\beta + a'x + b'y + c'z)^2 - q(\gamma + a''x + b''y + c''z) = 0$$

ou

$$(3)\qquad \left\{ \begin{aligned} & p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2 \\ & \qquad + Cx + C'y + C''z + D = 0. \end{aligned} \right.$$

Et, l'équation

$$p^2x^2 - p'^2y^2 = 0$$

est remplacée par

$$(4)\quad p^2(\alpha + ax + by + cz)^2 - p'^2(6 + a'x + b'y + c'z)^2 = 0.$$

Or, les équations du second degré (1) et (3), représentant la même surface rapportée aux mêmes coordonnées, ne peuvent différer que par un facteur indépendant des variables x, y, z; donc les termes du second degré de $F(x, y, z)$ sont, à ce facteur près,

$$p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2.$$

De plus l'équation

$$p^2(ax + by + cz)^2 - p'^2(a'x + b'y + c'z)^2 = 0$$

donne deux plans respectivement parallèles aux plans déterminés par l'équation (4), et ces derniers sont des plans directeurs; par conséquent la proposition est démontrée.

IV.

Trouver l'équation générale des paraboloïdes hyperboliques ayant pour plans directeurs deux plans donnés p, p′ *et dont une génératrice rectiligne soit la droite donnée* α *parallèle au plan* p.

Par α je conduis un plan p'' parallèle à p; il coupera p' suivant une droite α'. Je prends pour axes des x et des y les droites α, α', et pour axe des z une droite quelconque, autre que α', et menée dans le plan p' par l'intersection des droites α, α'. Les équations des plans p' et p'' seront

$$x = 0, \quad z = 0,$$

et la droite α sera représentée par les deux équations

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Il en résulte que l'équation générale des paraboloïdes hyperboliques ayant pour plans directeurs p, p'' ou p, p' est

$$xz + Cx + C'y + C''z + D = 0 \text{ (p. 401)},$$

C, C′, C″, D désignant des coefficients ou paramètres arbitraires.

Pour que la droite $y = 0$, $z = 0$ soit une génératrice de ces paraboloïdes, il faut que C et D soient nuls; donc l'équation cherchée est

$$xz + C'y + C''z = 0.$$

V.

Lorsqu'une équation $F(x) = 0$ *à coefficients commensurables admet pour racine le nombre irrationnel* $\sqrt[m]{a}$, *le premier membre* $F(x)$ *de l'équation est nécessairement divisible par* $x^m - a$, *en supposant toutefois qu'aucune puissance de* $\sqrt[m]{a}$, *de degré moindre que* m, *ne soit commensurable* (*).

Remarquons d'abord que le produit de deux racines imaginaires conjuguées de $x^m - a = 0$ est un nombre invariable égal à α^2, en désignant par α la valeur arithmétique du radical $\sqrt[m]{a}$. Car les racines de $x^m - a = 0$ s'obtiennent en multipliant par α celles de $x^m - 1 = 0$, et l'on sait que le produit de deux racines imaginaires con-

(*) Je n'affirme pas que ce soit exactement l'énoncé d'une question d'examen; c'est seulement l'interprétation d'un énoncé assez obscur qui m'a été remis. Plusieurs questions de ce genre ont été, je crois, proposées dans les examens publics par le célèbre auteur de la *Philosophie positive*. Elles s'appelaient alors questions de *spontanéité*. Depuis, elles ont changé de nom : on les nomme aujourd'hui questions d'*intelligence*.

juguées de cette dernière équation est toujours égal à $+1$.

Il en résulte que si aucune puissance de α de degré moindre que m n'est commensurable, le binôme $x^m - a$ n'admettra aucun diviseur à coefficients rationnels autre que $x^m - a$.

En effet soit, s'il est possible, $x^n + \ldots + r$ un diviseur de $x^m - a$, à coefficients rationnels et d'un degré moindre que m. Le produit de deux racines imaginaires conjuguées de l'équation

$$x^n + \ldots + r = 0$$

sera égal à α^2; ses racines réelles ne peuvent être que $\pm\alpha$: donc le produit $\pm r$ de toutes ses racines aura pour valeur absolue α^n. D'après cela, on voit que si le diviseur $x^n + \ldots + r$ avait ses coefficients commensurables, α^n serait rationnel, contrairement à ce qu'on a supposé, puisque n représente un nombre moindre que m.

Il est maintenant facile d'établir la proposition énoncée.

Car les équations

$$F(x) = 0, \quad x^m - a = 0$$

ayant leurs coefficients rationnels et une racine commune α, les polynômes $F(x)$ et $x^m - a$ admettent nécessairement un plus grand commun diviseur, fonction de x, dont les coefficients sont de même rationnels. Mais on vient de voir que $x^m - a$ n'a pas d'autre diviseur à coefficients rationnels que $x^m - a$; donc le plus grand commun diviseur de $F(x)$ et $x^m - a$ est $x^m - a$, et, par conséquent, $F(x)$ est exactement divisible par $x^m - a$. C'est ce qu'il fallait démontrer.

VI.

Propriétés des diamètres conjugués de l'ellipsoïde.

Ces propriétés ont déjà donné lieu à plusieurs articles dans les *Nouvelles Annales*. Mon savant collaborateur, M. Terquem, les a déduites de formules générales, extraites d'un Mémoire de Lagrange (t. I, p. 387 et 497); on peut, sans trop s'écarter du *Programme officiel*, les déduire des formules dont la connaissance est exigée pour l'admission à l'École Polytechnique; c'est ce que je me propose de faire voir ici.

Dans les calculs suivants, les coordonnées sont supposées rectangulaires; a, b, c représentent les demi-axes de l'ellipsoïde; a', b', c' les demi-diamètres conjugués d'un système quelconque; (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) (x_3, y_3, z_3) les coordonnées des points auxquels a', b', c' rencontrent la surface de l'ellipsoïde rapporté à ses axes.

1. Les équations de la droite a' sont

$$x = \frac{x_1}{z_1} z,$$

$$y = \frac{y_1}{z_1} z.$$

Par conséquent l'équation du plan diamétral conjugué de a' est

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} + \frac{z_1 z}{c^2} = 0.$$

La droite b' appartient à ce plan; donc

$$(1) \qquad \frac{x_1 x_2}{a^2} + \frac{y_1 y_2}{b^2} + \frac{z_1 z_2}{c^2} = 0.$$

Il est clair qu'on a de même

$$(2)\qquad \frac{x_1 x_3}{a^2} + \frac{y_1 y_3}{b^2} + \frac{z_1 z_3}{c^2} = 0,$$

$$(3)\qquad \frac{x_2 x_3}{a^2} + \frac{y_2 y_3}{b^2} + \frac{z_2 z_3}{c^2} = 0,$$

et, de plus,

$$(4)\qquad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} + \frac{z_1^2}{c^2} = 1,$$

$$(5)\qquad \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} + \frac{z_2^2}{c^2} = 1,$$

$$(6)\qquad \frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} = 1.$$

L'équation (4) montre que $\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{b}, \frac{z_1}{c}$ sont les *cosinus* des angles α, 6, γ qu'une droite forme avec les axes des coordonnées. On peut, par la même raison, considérer $\frac{x_2}{a}, \frac{y_2}{b}, \frac{z_2}{c}, \frac{x_3}{a}, \frac{y_3}{b}, \frac{z_3}{c}$ comme les *cosinus* des angles α', $6'$, γ', α'', $6''$, γ'' formés avec les axes par deux autres droites. Ces trois droites sont rectangulaires, puisque les équations (1), (2), (3) donnent

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$

$$\cos\alpha \cos\alpha'' + \cos 6 \cos 6'' + \cos\gamma \cos\gamma'' = 0,$$

$$\cos\alpha' \cos\alpha'' + \cos 6' \cos 6'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' = 0.$$

Il en résulte

$$\cos^2\alpha + \cos^2\alpha' + \cos^2\alpha'' = 1,$$

$$\cos^2 6 + \cos^2 6' + \cos^2 6'' = 1,$$

$$\cos^2\gamma + \cos^2\gamma' + \cos^2\gamma'' = 1,$$

d'où

$$(7)\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a^2,$$

$$(8)\qquad y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = b^2,$$

$$(9)\qquad z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = c^2.$$

C'est-à-dire que :

Les sommes des carrés des projections de trois diamètres conjugués a', b', c' *sur les axes de l'ellipsoïde sont respectivement égales aux carrés de ces axes.*

Et conséquemment :

La somme des carrés de trois diamètres conjugués est égale à la somme des carrés des axes de l'ellipsoïde.

2. Les trois droites $(\alpha, 6, \gamma)$, $(\alpha', 6', \gamma')$, $(\alpha'', 6'', \gamma'')$ étant rectangulaires, on a

$$\cos\alpha \cos 6 + \cos\alpha' \cos 6' + \cos\alpha'' \cos 6'' = 0$$

ou

$$(10)\qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0,$$

et de même

$$(11)\qquad x_1 z_1 + x_2 z_2 + x_3 z_3 = 0,$$

$$(12)\qquad y_1 z_1 + y_2 z_2 + y_3 z_3 = 0.$$

Au moyen de ces trois relations, nous allons démontrer que :

La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur une droite quelconque est égale à la somme des carrés des projections des axes sur cette droite.

En effet, soient l, m, n les cosinus des angles que font les axes des coordonnées x, y, z, avec la droite considérée, et p, p', p'' les projections de a', b', c' sur la droite (l, m, n). Comme a' est la résultante du contour formé par les coordonnées x_1, y_1, z_1, le principe relatif à la projection de la résultante donne

$$p^2 = (lx_1 + my_1 + nz_1)^2,$$

on a de même

$$p'^2 = (lx_2 + my_2 + nz_2)^2,$$
$$p''^2 = (lx_3 + my_3 + nz_3)^2.$$

Additionnant ces trois équations, en ayant égard aux relations (10), (11), (12), il vient

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = l^2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + m^2(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$
$$+ n^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)$$

ou

$$p^2 + p'^2 + p''^2 = (la)^2 + (mb)^2 + (nc)^2.$$

Ce qui démontre la proposition énoncée.

3. De l'équation

$$\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6' + \cos\gamma \cos\gamma' = 0,$$

on tire d'abord

$$(\cos\alpha \cos\alpha' + \cos 6 \cos 6')^2$$
$$= \cos^2\gamma \cos^2\gamma' = (1 - \cos^2\alpha - \cos^2 6)(1 - \cos^2\alpha' - \cos^2 6').$$

Puis, développant et réduisant,

$$(\cos\alpha \cos 6' - \cos 6 \cos\alpha')^2$$
$$= \cos^2\alpha + \cos^2 6 + \cos^2\alpha' + \cos^2 6' - 1 = 1 - \cos^2\gamma - \cos^2\gamma'$$

ou

$$(\cos\alpha \cos 6' - \cos 6 \cos\alpha')^2 = \cos^2\gamma''.$$

Cette dernière équation devient, en substituant aux *co-*

sinus leurs valeurs $\frac{x_1}{a}$, $\frac{y_1}{b}$, etc.,

$$\left(\frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{ab}\right)^2 = \frac{z_3^2}{c^2};$$

d'où

$$(13) \qquad [x_1 y_2 - y_1 x_2]^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{z_3^2}{c^4}.$$

Et semblablement on a

$$(14) \qquad [x_1 z_2 - z_1 x_2]^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{y_3^2}{b^4},$$

$$(15) \qquad [y_1 z_2 - z_1 y_2]^2 = a^2 b^2 c^2 \frac{x_3^2}{a^4}.$$

Les égalités précédentes (13), (14), (15) vont nous servir à établir cette proposition :

Le parallélipipède construit sur trois diamètres conjugués a′, b′, c′ *de l'ellipsoïde est équivalent au parallélipipède des axes de cette surface.*

Je prends pour base du parallélipipède des diamètres conjugués le parallélogramme construit sur a' et b'. En nommant s la surface de ce parallélogramme et θ l'angle des droites a', b', on aura

$$s = a' b' \sin\theta.$$

Mais les droites a', b' ont pour équations

$$x = \frac{x_1}{z_1} z, \quad y = \frac{y_1}{z_1} z; \quad x = \frac{x_2}{z_2} z, \quad y = \frac{y_2}{z_2} z;$$

donc

$$\cos\theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}},$$

il en résulte

$$\sin^2\theta = \frac{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2}{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}.$$

Et par suite

$$s^2 = (x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2)^2,$$

égalité qui revient à

$$s^2 = (x_1y_2-y_1x_2)^2+(x_1z_2-z_1x_2)^2+(y_1z_2-z_1y_2)^2$$

comme il est facile de s'en assurer.

Les relations (13), (14), (15) réduisent cette dernière expression de s^2 à

$$s^2 = a^2b^2c^2\left[\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}\right].$$

D'autre part, la hauteur h du parallélipipède considéré étant la distance du point (x_3, y_3, z_3) au plan

$$\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}+\frac{zz_3}{c^2}=0,$$

on a, d'après une formule connue,

$$h^2 = \frac{1}{\dfrac{x_3^2}{a^4}+\dfrac{y_3^2}{b^4}+\dfrac{z_3^2}{c^4}}.$$

De là

$$s^2h^2 = a^2b^2c^2.$$

Ou, en désignant par v le volume du parallélipipède,

$$v = abc.$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

4. Actuellement, je désigne par ω l'angle que le plan

des coordonnées x, y fait avec le plan des diamètres conjugués a', b' et qui a pour équation

$$\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}+\frac{zz_3}{c^2}=0.$$

La valeur de $\cos\omega$ sera déterminée par l'égalité

$$\cos^2\omega=\frac{\frac{z_3^2}{c^4}}{\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}},$$

ou

$$\cos^2\omega=h^2\frac{z_3^2}{c^4},$$

puisque

$$h^2=\frac{1}{\frac{x_3^2}{a^4}+\frac{y_3^2}{b^4}+\frac{z_3^2}{c^4}}.$$

L'équation

$$\cos^2\omega=h^2\frac{z_3^2}{c^4}$$

donne successivement

$$s^2\cos^2\omega=s^2h^2\frac{z_3^2}{c^4}=a^2b^2c^2\frac{z_3^2}{c^4}=a^2b^2\frac{z_3^2}{c^2}.$$

ou

$$(s\cos\omega)^2=(ab)^2\frac{z_3^2}{c^2}.$$

Mais le produit $s.\cos\omega$ est la projection du parallélogramme s sur le plan des coordonnées xy; on a donc, en désignant par P cette projection,

$$P^2=(ab)^2\frac{z_3^2}{c^2}.$$

Si s', s'' représentent les parallélogrammes construits sur les diamètres conjugués a', c' et b', c', et P', P'' les projections de s', s'' sur le plan des x, y, il est clair qu'on aura de même

$$P'^2 = (ab)^2 \frac{y_3^2}{c^2}, \quad P''^2 = (ab)^2 \frac{x_3^2}{c^2},$$

et, par suite,

$$P^2 + P'^2 + P''^2 = (ab)^2 \left(\frac{z_3^2 + y_3^2 + x_3^2}{c^2}\right) = (ab)^2.$$

Ainsi, *la somme des carrés des projections sur le plan des* xy *des parallélogrammes construits sur trois diamètres conjugués quelconques est égale au carré du rectangle des deux axes qui appartiennent à ce plan.*

Et comme le même principe s'applique évidemment aux projections sur les deux autres plans des coordonnées, il en faut conclure que :

La somme des carrés des parallélogrammes construits sur trois diamètres conjugués quelconques de l'ellipsoïde est une quantité constante et égale à la somme des carrés des rectangles construits sur les trois axes de la surface.

Cette dernière proposition et les deux égalités

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad v = abc,$$

démontrées (n^{os} 1 et 3), résultent encore des relations qui existent entre les racines et les coefficients d'une équation du troisième degré; c'est ce que nous allons expliquer.

5. De l'équation de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

je retranche l'équation de la sphère

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=1,$$

il en résulte

$$(1)\qquad x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{r^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{r^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{r^2}\right)=0,$$

équation d'un cône dont le sommet est au centre de l'ellipsoïde et qui passe par les points communs à l'ellipsoïde et à la sphère.

Soit

$$a>b>c.$$

Si l'on suppose

$$r=a,$$

l'équation (1) se réduit à

$$(2)\qquad y^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)=0,$$

et comme $\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)$, $\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)$ ont le même signe, l'équation (2) n'admet pas d'autre solution réelle que $y=0$, $z=0$, c'est-à-dire que dans ce cas l'équation (1) représente l'axe des x.

On verra de même que si $r=c$, l'équation (1) représente l'axe des z.

Lorsque $r=b$, l'équation (1) devient

$$(3)\qquad x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)=0;$$

les coefficients $\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)$, $\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)$ ayant des signes contraires, l'équation (3) est l'équation du système de deux plans qui se coupent suivant l'axe des y.

Ainsi le cône se réduit au système de deux plans qui se coupent, ou bien à une droite, suivant que la sphère a pour diamètre l'axe moyen de l'ellipsoïde ou l'un des deux autres axes. Dans le premier cas, en coupant par un plan la surface que l'équation (1) représente, on aura pour section deux droites, et, dans le second cas, on aura pour section un seul point.

Réciproquement, si la section est formée de deux droites concourantes ou d'un seul point réel, le diamètre de la sphère sera nécessairement égal à l'un des trois axes de l'ellipsoïde, en admettant toutefois que le plan sécant ne passe pas par l'origine des coordonnées qui est le sommet du cône.

Cela posé, nommons a', b', c' trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde et α, β, γ les angles que ces diamètres forment deux à deux; en les prenant pour axes de coordonnées, l'ellipsoïde, la sphère et le cône seront respectivement représentés par les équations

$$\left(\frac{x}{a'}\right)^2+\left(\frac{y}{b'}\right)^2+\left(\frac{z}{c'}\right)^2=1,$$

$$\left(\frac{x}{r}\right)^2+\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2$$
$$+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\alpha+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\beta+2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\gamma=1,$$

$$x^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+z^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c'^2}\right)$$
$$+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\alpha+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\beta+2\left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{z}{r}\right)\cos\gamma=0.$$

La projection sur le plan des xy de l'intersection du cône et d'un plan $z = m$ a pour équation

$$x^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a'^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b'^2}\right)+2\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\alpha$$
$$+2\frac{m}{r}\left(\frac{x}{r}\right)\cos 6+2\left(\frac{m}{r}\right)\left(\frac{y}{r}\right)\cos\gamma+m^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c'^2}\right)=0$$

ou plus simplement

$$(4) \qquad Ay^2+Bxy+Cx^2+Dy+Ex+F=0,$$

en posant

$$A=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{b'^2},$$

$$B=\frac{2\cos\alpha}{r^2},$$

$$C=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{a'^2},$$

$$D=\frac{2m\cos\gamma}{r^2},$$

$$E=\frac{2m\cos 6}{r^2},$$

$$F=m^2\left(\frac{1}{r^2}-\frac{1}{c'^2}\right).$$

Pour que le diamètre de la sphère soit égal à l'un des trois axes de l'ellipsoïde, il faut que l'équation (4) représente deux droites ou un point, ce qui donne, comme on sait,

$$AE^2+CD^2+FB^2-BDE-4ACF=0.$$

En remplaçant A, B, C, D, E, F par leurs valeurs, on trouve

$$(r^2)^3-(a'^2+b'^2+c'^2)(r^2)^2$$
$$+[a'^2b'^2\sin^2\alpha+a'^2c'^2\sin^2 6+b'^2c'^2\sin^2\gamma](r^2)$$
$$-a'^2b'^2c'^2[1+2\cos\alpha\cos 6\cos\gamma-\cos^2\alpha-\cos^2 6-\cos^2\gamma]=0.$$

Les valeurs de r^2 qui vérifient cette équation étant a^2, b^2, c^2, on a

$$(5)\qquad a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

$$(6)\qquad \left\{\begin{array}{l}(a'\,b'\sin\alpha)^2 + (a'\,c'\sin6)^2 + (b'\,c'\sin\gamma)^2\\ \qquad = (ab)^2 + (ac)^2 + (bc)^2\end{array}\right.$$

$$(7)\left\{\begin{array}{l}a'^2\,b'^2\,c'^2\,[1 + 2\cos\alpha\cos6\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma]\\ \qquad = a^2\,b^2\,c^2.\end{array}\right.$$

Les relations (5) et (6) donnent une nouvelle démonstration des propositions déjà établies (n^{os} 1 et 4). Pour interpréter l'égalité (7), remarquons que les diamètres conjugués a', b', c' déterminent un trièdre dont les angles plans sont α, 6, γ. En nommant θ le dièdre opposé à α dans cet angle solide, on aura, d'après la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique,

$$\cos\theta = \frac{\cos\alpha - \cos6\cos\gamma}{\sin6\sin\gamma},$$

d'où

$$\sin^2\theta = \frac{1 + 2\cos\alpha\cos6\cos\gamma - \cos^2\alpha - \cos^2 6 - \cos^2\gamma}{\sin^2 6\sin^2\gamma}.$$

Il en résulte, en ayant égard à l'équation (7) :

$$a'^2\,b'^2\,c'^2\sin^2\theta\sin^2 6\sin^2\gamma = a^2\,b^2\,c^2,$$

$$a'\,b'\,c'\sin\theta\sin6\sin\gamma = abc.$$

Donc, le parallélipipède construit sur les trois diamètres conjugués a', b', c' est équivalent au parallélipipède des axes. G.