GARCET

Théorème sur l'élévation à une puissance d'une certaine progression géométrique

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 397-398

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__397_1>

THÉORÈME

sur l'élévation à une puissance d'une certaine progression géométrique ;

PAR M. GARCET,
Capitaine du génie, à Marseille.

Si l'on développe suivant les puissances de x

$$(1+x+x^2+x^3+\ldots+x^{p-2})^n,$$

p et n étant deux entiers positifs, et qu'on additionne les coefficients de q en q (pourvu que q ne dépasse pas p), toutes ces sommes sont égales à $\frac{(p-1)^n}{q}$ à l'unité près.

C'est-à-dire que si q divise $(p-1)^n$, toutes ces sommes sont égales à $\frac{(p-1)^n}{q}$ exactement ; et si q ne divise pas $(p-1)^n$, les unes sont égales à la partie entière de ce quotient et les autres à cette partie entière augmentée d'une unité. Ainsi comme exemple $(1+x+x^2)^7$ est

$$x^{14}+7x^{13}+28x^{12}+77x^{11}+161x^{10}+266x^9+357x^8+393x^7$$
$$+357x^6+266x^5+161x^4+77x^3+28x^2+7x+1.$$

Si l'on compte les termes de quatre en quatre on a d'abord

$$\begin{aligned} 1 + 161 + 357 + 28 &= 547, \\ 7 + 266 + 266 + 7 &= 546, \\ 28 + 357 + 161 + 1 &= 547, \\ 77 + 393 + 77 &= 547. \end{aligned}$$

c'est-à-dire toujours $\frac{3^7}{4}$ (quotient par excès ou par défaut).

Mais en outre si l'on compte de trois en trois, on a

$$\begin{aligned} 1 + 77 + 357 + 266 + 28 &= 729, \\ 7 + 161 + 393 + 161 + 7 &= 729, \\ 28 + 266 + 357 + 77 + 1 &= 729, \end{aligned}$$

c'est-à-dire toujours $\frac{3^7}{3}$.

Si on les compte de deux en deux, on a encore

$$\begin{aligned} 1 + 28 + 161 + 357 + 357 + 161 + 28 + 1 &= 1094, \\ 7 + 77 + 266 + 393 + 266 + 77 + 7 &= 1093, \end{aligned}$$

toujours $\frac{3^7}{2}$ à une unité près.

Pour le cas du binôme $(1+x)^n$, on trouve le théorème de trois en trois que je donnai l'an passé (t. XIX, p. 32), ainsi que l'égalité connue des sommes de coefficients de rang pair et de rang impair.