Gerono

Question d'examen (École navale)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 391-393

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__391_1>

QUESTION D'EXAMEN (ÉCOLE NAVALE).

Quel est le plus grand quadrilatère que l'on puisse former avec quatre côtés donnés a, b, c, d?

Soit ABCD l'un des quadrilatères que l'on peut former en prenant pour côtés consécutifs a, b, c, d. Supposons $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$. En nommant S l'aire de ce quadrilatère, on aura

$$(1) \qquad S = \frac{1}{2}(ad \sin A + bc \sin C).$$

En outre

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos C, \quad \text{et} \quad \overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2\,ad \cos A,$$

donc

$$a^2 + d^2 - 2\,ad \cos A = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos C;$$

d'où

$$2\,ad\cos A - 2\,bc\cos C = a^2 + d^2 - b^2 - c^2;$$

$$\cos A - \left(\frac{bc}{ad}\right)\cos C = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2.ad}.$$

Si l'on pose

$$\frac{bc}{ad} = h \quad \text{et} \quad \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,ad} = k,$$

l'équation précédente deviendra

$$(2) \qquad \cos A - h\cos C = k.$$

D'autre part, l'équation (1) donne

$$(3) \qquad \sin A + h\sin C = \frac{2.S}{ad}.$$

Élevant au carré les équations (2) et (3) et additionnant, il vient

$$1 + h^2 - 2\,h\,(\cos A\cos C - \sin A\sin C) = k^2 + \frac{4\,S^2}{a^2\,d^2},$$

ou

$$1 + h^2 - 2\,h\cos(A + C) = k^2 + \frac{4\,S^2}{a^2\,d^2};$$

et par conséquent

$$(4) \qquad S = \frac{ad}{2}\sqrt{1 + h^2 - 2\,h.\cos(A + C) - k^2}.$$

L'équation (4) montre que la plus grande valeur de S correpond à

$$\cos(A + C) = -1,$$

égalité qui donne

$$A + C = 180^\circ.$$

Il en faut conclure que *le plus grand des quadrilatères* *que l'on puisse former avec quatre côtés donnés a, b, c, d, est le quadrilatère inscriptible dans un cercle.*

En remplaçant cos $(A+C)$ par -1, l'équation (4) devient

$$S=\frac{ad}{2}\sqrt{(h+1)^2-k^2}=\frac{ad}{2}\sqrt{(h+1+k)(h+1-k)}$$

ou, parce que $h=\frac{bc}{ad}$ et $k=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2ad}$,

$$S=\frac{ad}{2}\frac{\sqrt{(2bc+2ad+a^2+d^2-b^2-c^2)(2bc+2ad-a^2-d^2+b^2+c^2)}}{2.ad},$$

équation qui donne successivement

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+d)^2-(b-c)^2][(b+c)^2-(a-d)^2]};$$

$$S=\frac{1}{4}\sqrt{(a+d+b-c)(a+d+c-b)(b+c+a-d)(b+c+d-a)}.$$

Si l'on désigne par $2p$ la somme des quatre droites données, on aura pour l'expression du maximum de S, $\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$. G.