GERONO

Notes sur quelques questions d'examen (École polytechnique)

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 386-391

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__386_0>

NOTES SUR QUELQUES QUESTIONS D'EXAMEN (ÉCOLE POLYTECHNIQUE).

I

Par un point A *d'une ellipse donnée on mène deux cordes rectangulaires,* AB, AC, *mais d'ailleurs quelconques : démontrer que l'hypoténuse* BC *du triangle rectangle* ABC *passe par un point fixe; et trouver le lieu géométrique de ce point, quand le sommet* A *de l'angle droit* BAC *change de position sur l'ellipse.*

La première de ces deux questions n'est pas nouvelle; M. Terquem en a donné une solution des plus simples (t. II, p. 186), et M. Beynac a depuis ajouté d'utiles remarques à cette solution (t. XVIII, p. 85). Si, en revenant encore sur la proposition dont il s'agit, je modifie la démonstration qui en a été donnée, c'est afin de comprendre dans un seul calcul les deux questions proposées.

Je prends pour axes des coordonnées les axes a, b de l'ellipse, et je nomme α, β les coordonnées x, y du point A.

La courbe sera représentée par

$$a^2(y^2-\beta^2)+b^2(x^2-\alpha^2)=0,$$

équation qu'on peut écrire ainsi

$$a^2(y-\beta)(y+\beta)+b^2(x-\alpha)(x+\alpha)=0,$$

et, en observant que

$$y+\beta=(y-\beta)+2\beta,\quad x+\alpha=(x-\alpha)+2\alpha,$$

on aura pour l'équation de l'ellipse

$$(1)\quad a^2(y-\beta)^2+b^2(x-\alpha)^2+2[a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)]=0;$$

la fonction du premier degré $a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)$, égalée à zéro, donne l'équation de la tangente à l'ellipse au point A.

Le système des deux droites rectangulaires AB, AC, a pour équation

$$(2)\qquad (y-\beta)^2+k(y-\beta)(x-\alpha)-(x-\alpha)^2=0,$$

k désignant un coefficient qui varie lorsqu'on fait tourner autour du point A le système des deux droites rectangulaires.

L'équation générale des lignes du second degré, passant par les points communs aux lignes (1) et (2), est

$$(3)\quad (a^2+\lambda)(y-\beta)^2+(b^2-\lambda)(x-\alpha)^2+k\lambda(y-\beta)(x-\alpha)$$
$$+2[a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)]=0.$$

On peut disposer de l'indéterminée λ de manière que l'équation (3) représente deux droites dont l'une soit la tangente

$$a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)=0.$$

Il suffit, pour cela, de donner à λ une valeur qui rende la fonction homogène

$$(a^2+\lambda)(y-\beta)^2+(b^2-\lambda)(x-\alpha)^2+k\lambda(y-\beta)(x-\alpha)$$

exactement divisible par

$$a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha).$$

Or, le quotient ne peut être qu'une fonction homogène du premier degré par rapport à $y-\beta$, $x-\alpha$, dont les deux termes s'obtiennent en divisant respectivement

$(a^2+\lambda)(y-\beta)^2$, et $(b^2-\lambda)(x-\alpha)^2$ par $a^2\beta(y-\beta)$ et $b^2\alpha(x-\alpha)$; ce quotient sera donc

$$\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)(y-\beta)+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)(x-\alpha).$$

En le multipliant par le diviseur $a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha)$, et égalant le produit au dividende, on a évidemment

$$k\lambda=\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)b^2\alpha+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)a^2\beta,$$

équation du premier degré dont la résolution fera connaître la valeur de λ en fonction de k.

En disposant ainsi de l'indéterminée λ, le premier membre de l'équation (3) devient le produit des facteurs

$$a^2\beta(y-\beta)+b^2\alpha(x-\alpha),$$

et

$$\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)(y-\beta)+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)(x-\alpha)+2;$$

il en résulte que la droite BC a pour équation

$$\left(\frac{a^2+\lambda}{a^2\beta}\right)(y-\beta)+\left(\frac{b^2-\lambda}{b^2\alpha}\right)(x-\alpha)+2=0.$$

Et comme cette équation est vérifiée, quelle que soit la valeur de λ, par

$$y-\beta=\frac{-2a^2\beta}{a^2+b^2}, \quad \text{et} \quad x-\alpha=\frac{-2b^2\alpha}{a^2+b^2},$$

on voit que la droite BC passe par un point fixe dont les coordonnées sont

$$y=\beta-\frac{2a^2\beta}{a^2+b^2}=-\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\beta;$$

$$x=\alpha-\frac{2b^2\alpha}{a^2+b^2}=\left(\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\right)\alpha.$$

C'est ce que nous voulions d'abord démontrer.

Si l'on suppose maintenant que le point A change de position sur l'ellipse, les coordonnées α, β varieront, et il faudra pour déterminer le lieu géométrique du point dont les coordonnées sont

$$y = -\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\beta, \quad x = \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)\alpha,$$

éliminer β et α entre ces deux dernières équations et l'équation

$$a^2\beta^2 + b^2\alpha^2 = a^2 b^2.$$

L'élimination donne immédiatement

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2,$$

équation qui représente une ellipse de même centre que l'ellipse donnée, semblable et semblablement placée. On peut remarquer que le lieu géométrique déterminé par l'équation obtenue est celui des points qui divisent les diamètres de l'ellipse donnée, dans le rapport des carrés des deux axes de cette ellipse. G.

II

Déterminer le lieu géométrique des centres des cônes de révolution qui passent par la parabole représentée par $z = 0$, $y^2 = 2px$. (Coordonnées rectangulaires.)

L'équation générale des cônes du second degré passant par la parabole $z = 0$, $y^2 = 2px$ est

$$(1) \quad [\beta(z-\gamma) - \gamma(y-\beta)]^2 - 2p(z-\gamma)[\alpha(z-\gamma) - \gamma(x-\alpha)] = 0;$$

α, β, γ sont trois coefficients variables qui représentent les coordonnées du centre, γ ne peut être nul; c'est ce qu'on trouve par l'application d'une méthode connue.

Pour que le cône soit de révolution, il faut, comme on sait, qu'en nommant λ un coefficient différent de zéro, l'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{array}{l}[\beta(z-\gamma)-\gamma(y-\beta)]^2-2p(z-\gamma)[\alpha(z-\gamma)-\gamma(x-\alpha)]\\ \qquad +\lambda[(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2-r^2]\end{array}\right\}=0$$

donne deux plans parallèles équidistants du centre (α, β, γ). Ce qui exige que les trois dérivées de l'équation (2) représentent le même plan.

Ces trois équations dérivées sont :

$$(3)\qquad p\gamma(z-\gamma)+\lambda(x-\alpha)=0,$$

$$(4)\qquad \beta\gamma(z-\gamma)-(\lambda+\gamma^2)(y-\beta)=0,$$

$$(5)\qquad (\beta^2-2p\alpha+\lambda)(z-\gamma)-\beta\gamma(y-\beta)+p\gamma(x-\alpha)=0.$$

Le coefficient λ n'étant pas nul, l'équation (3) contient x qui n'entre pas dans l'équation (4), il faut donc que cette dernière soit vérifiée elle-même, autrement elle appartiendrait à un plan différent de celui que représente l'équation (3). Ainsi, on a

$$\lambda+\gamma^2=0, \quad \beta\gamma=0,$$

d'où

$$\beta=0, \quad \lambda=-\gamma^2.$$

Ces valeurs de β et λ réduisent l'équation (5) à

$$-(\gamma^2+2p\alpha)(z-\gamma)+p\gamma(x-\alpha)=0.$$

On en tire

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\frac{p\gamma}{\gamma^2+2p\alpha}.$$

L'équation (3) donne

$$\frac{z-\gamma}{x-\alpha}=\frac{-\lambda}{p\gamma}=\frac{\gamma^2}{p\gamma}=\frac{\gamma}{p}.$$

Donc,

$$\frac{\gamma}{p} = \frac{p\gamma}{\gamma^2 + 2p\alpha};$$

$$\gamma^2 + 2p\alpha = p^2,$$

$$\gamma^2 = p^2 - 2p\alpha.$$

Par conséquent, les équations du lieu géométrique cherché sont

$$\beta = 0, \quad \gamma^2 = p^2 - 2p\alpha.$$

On voit que ce lieu est une parabole située dans le plan des zx; elle a le même paramètre que la parabole donnée $z = 0$, $y^2 = 2px$. Son sommet coïncide avec le foyer de la parabole donnée; mais elle est dirigée en sens contraire. G. (*La suite prochainement.*)