DELLAC

Solution de la question 571

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 375-376

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__375_1>

SOLUTION DE LA QUESTION 571

(voir p 112),

PAR M. DELLAC.

Il faut trouver

$$z = \sum_{1}^{\infty} \frac{x^p + y^p}{p^2}$$

sachant que

$$x + y = 1.$$

Cette dernière relation donne

$$\frac{dy}{dx} = -1,$$

donc

$$\frac{dz}{dx} = \sum \frac{x^{p-1} - y^{p-1}}{p} = \frac{1}{x}\sum \frac{x^p}{p} - \frac{1}{y}\sum \frac{y^p}{p}$$

ou bien

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\log(1-x) - \frac{1}{y}\log(1-y),$$

ou bien encore

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}\log y - \frac{1}{y}\log x.$$

Le second membre est une différentielle exacte, celle de $-\log x.\log y$: intégrant de part et d'autre, il vient

$$z = C - \log x.\log y.$$

Pour $x = 1$ et par suite $y = 0$, le premier membre devient

$$\sum \frac{1}{p^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \text{(resultat connu)},$$

tandis que la seconde se réduit à C, car $\log x.\log(1-x)$ devient nul pour $x = 1$: donc

$$C = \frac{\pi^2}{6},$$

et l'on a

$$z = \frac{\pi^2}{6} - \log x.\log y.$$

C. Q. F. D.