NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E.-E. KUMMER

Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 359-365

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__359_0>

© Nouvelles annales de mathématiques, 1861, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Nouvelles annales de mathématiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

THÉORIE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES DE RAYONS RECTILIGNES

(voir t. XX, p. 255);

PAR M. E.-E. KUMMER.

CRELLE, t. LVII.

TRADUIT PAR M. E. DEWULF,
Capitaine du Génie.

§ V. — *Des surfaces qui dépendent d'un système de rayons.*

Les cinq points que nous avons déterminés sur chaque rayon, savoir les deux points limites des plus courtes distances, les deux foyers et le centre, ont pour lieux géométriques cinq surfaces quand on considère tous les rayons d'un système. Ces cinq surfaces sont liées au système d'une manière très-intime. Les deux surfaces, lieux géométriques des points limites, se présentent habituellement sous la forme analytique d'une seule surface, en ce sens qu'elles sont représentés par un même équation. Par suite, elles peuvent être considérées comme deux nappes d'une même surface. Cependant, comme il est quelquefois nécessaire de les distinguer l'une de l'autre, nous les désignerons dans la suite par les lettres F_1 et F_2. *Ces deux surfaces partagent l'espace en deux régions; l'une d'elles, comprise entre les deux surfaces, renferme toutes les plus courtes distances de deux rayons infiniment voisins; l'autre, située en dehors des deux surfaces, ne renferme aucune de ces plus courtes distances.*

Si l'on passe d'un rayon au rayon infiniment voisin dont la plus courte distance au premier se trouve sur la surface F_1, de ce second rayon à un troisième rayon infiniment voisin dont la plus courte distance au second se trouve encore sur F_1, et ainsi de suite, l'ensemble de tous ces rayons forme une surface réglée O_1. La courbe d'intersection a de O_1 avec F_1 est la courbe de O_1 qui jouit de cette propriété que les plus courtes distances de deux génératrices consécutives forment précisément les éléments de cette courbe. C'est la courbe de striction. O_1 coupe aussi F_2 suivant une courbe b_2. Si l'on opère de la même manière sur F_2, on obtient une surface réglée O_2 dont la ligne de striction est la courbe d'intersection a_2 de O_2 et de F_2. O_2 coupe aussi F_1 suivant une certaine courbe b_1.

Tout ce que nous venons de dire subsiste quel que soit le rayon du système que l'on prend pour point de départ; il existe donc une série de surfaces réglées O_1 dont les lignes de striction forment une série de courbes a_1 tracées sur F_1 et qui coupent aussi F_2 suivant une série de courbes b_2. On a de même une série de surfaces réglées O_2 dont les courbes de striction a_2 se trouvent sur F_2 et qui coupent F_1 suivant une série de courbes b_1.

Désignons par x', y', z' les coordonnées du premier des points limites sur le rayon issu du point x, y, z, on a

$$x' = x + r_1\xi, \quad y' = y + r_1\eta, \quad z' = z + r_1\zeta.$$

Ce sont les équations de la surface F_1 en ce sens que les coordonnées de chacun des points de cette surface sont des fonctions de deux variables indépendantes. De même

$$x' = x + r_2\xi, \quad y' = y + r_2\eta, \quad z' = z = r_2\zeta,$$

sont les équations de F_2.

Pour avoir les équations des séries de surfaces O_1 et O_2, il faut intégrer les équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = t_1, \quad \frac{dv}{du} = t_2.$$

Les équations que l'on obtient renferment chacune une constante arbitraire. Si, entre l'une de ces équations et les deux équations

$$\frac{x' - x}{\xi} = \frac{y' - y}{\eta} = \frac{z' - z}{\zeta},$$

on élimine les variables u et v, on obtiendra une équation en $x' y' z'$ qui contiendra une constante arbitraire et représentera l'une ou l'autre des séries de surfaces réglées O_1, O_2 suivant que l'on aura employé l'une ou l'autre des équations données par les intégrales. Les deux séries de courbes a_1 et b_1 sur F_1, ou a_2 et b_2 sur F_2 seront représentées par les trois équations de F_1 ou F_2 et l'une ou l'autre des équations données par les intégrales.

Les deux surfaces sur lesquelles se trouvent les foyers d'un système se nomment *surfaces focales du système*. Nous les désignerons par Φ_1 et Φ_2. Ces surfaces n'ont de points réels sur un rayon que si les foyers de ce rayon sont réels ou si les racines τ_1 et τ_2 de l'équation quadratique (5), § 4, ont des valeurs réelles.

Si l'on passe d'un rayon au rayon infiniment voisin qui coupe le premier en un point situé sur Φ_1, de ce second rayon à un point troisième qui coupe le second en un point situé sur Φ_1 et ainsi de suite, on obtient une série de rayons telle, que chacun d'eux coupe le précédent en un point de Φ_1. Cette série de rayons forme donc une surface développable Ω_1, dont l'arête de rebroussement α_1 s'y trouve sur Φ_1 et qui coupe Φ_2 suivant une certaine courbe β_2. Comme nous sommes partis d'un rayon quelconque, il est clair qu'il existe une série de surfaces développables Ω_1, dont les arêtes de rebroussement forment une série de courbes α_1 tracées sur Φ_1, et qui déterminent sur Φ_2 une série de courbes β_2. De la même manière, les rayons issus des foyers situés sur Φ_2 forment une seconde série de surfaces développables Ω_2 dont les arêtes de rebroussement α_2 sont tracées sur Φ_2 et qui coupent Φ_1 suivant une série de courbes β_1. On a donc le théorème suivant :

Tout système de rayons à foyers réels peut être considéré de deux manières différentes, comme appartenant à une série de surfaces développables telles, que le lieu géométrique de leurs arêtes de rebroussement est l'ensemble des deux surfaces focales.

Toutes les génératrices de Ω_1 sont tangentes aux arêtes de rebroussement α_1, les arêtes de rebroussement se trouvent toutes sur Φ_1, donc les rayons du système sont tangents à Φ_1. On verrait de même qu'ils sont tous tangents à Φ_2. Donc

Tous les rayons d'un système qui ont des foyers réels sont des tangentes communes aux deux surfaces focales.

On peut aussi énoncer le théorème suivant comme conséquence du précédent :

Tout système de rayons à foyers réels peut être considéré comme le système des tangentes communes aux deux surfaces focales, ou comme le système des tangentes doubles d'une surface.

Pour déterminer complétement un système, on peut aussi ne se donner qu'une de ses surfaces focales Φ_1, par exemple, pourvu que l'on se donne en même temps la série de courbes α_1 de cette surface; il en résulte que

Tout système de rayons à surfaces focales réelles peut *être considéré comme le système des tangentes à une série de courbes tracées sur une surface.*

Comme tous les rayons situés sur une surface développable Ω_1 sont tangents à Φ_2, la courbe β_2 est la courbe de contact des deux surfaces. De même, toute surface développable Ω_2 est tangente à Φ_1 ou l'enveloppe suivant une certaine courbe. Donc

Chacune des deux surfaces focales d'un système est enveloppée par une des séries de surfaces développables qui renferment tous les rayons du système.

D'après un théorème connu, les génératrices rectilignes d'une surface développable qui enveloppe une autre surface suivant une certaine courbe, sont les tangentes conjuguées des tangentes à cette courbe. Donc

Les deux séries de courbes déterminées par les deux séries de surfaces développables sur les surfaces focales d'un système se coupent sur chacune de ses surfaces suivant des directions conjuguées.

Si les deux surfaces focales Φ_1 et Φ_2 se coupent, toute tangente à la courbe d'intersection est un des rayons du système, et par suite une tangente à l'une des courbes α_1. La courbe d'intersection et α_1 ont donc une tangente commune, les points de contact coïncident; la courbe α_1 est donc tangente à la courbe d'intersection. Ceci est vrai, quelle que soit la tangente à la courbe d'intersection que l'on considère. Donc toutes les courbes de la série α_1 sont tangentes à la courbe d'intersection $\Phi_1 \Phi_2$. Il en est de même pour toutes les courbes de la série α_2. Donc

La courbe d'intersection des deux surfaces focales est la courbe enveloppe ou la courbe limite de toutes les arêtes de rebroussement situées sur les deux surfaces *focales et appartenant aux deux surfaces développables qui renferment tout le système de rayons.*

On obtient les équations des surfaces focales, comme on a obtenu plus haut celles des surfaces des points limites, au moyen des abscisses ρ_1 et ρ_2 des foyers; on a

$$x' = x + \rho_1 \xi, \quad y' = y + \rho_1 \eta, \quad z' = z + \rho_1 \zeta$$

et

$$x' = x + \rho_2 \xi, \quad y' = y + \rho_2 \eta, \quad z' = z + \rho_2 \zeta.$$

On obtient les deux séries de surfaces développables, les séries de courbes α_1, β_1 de Φ_1, α_2, β_2 de Φ_2 par l'intégration des équations différentielles

$$\frac{dv}{du} = \tau_1, \quad \frac{dv}{du} = \tau_2,$$

absolument comme cela se fait pour les surfaces O_1 et O_2 et les systèmes de courbures a_1 et b_1 de F_1, a_2 et b_2 de F_2.

Considérons enfin la surface lieu géométrique des centres d'un système de rayons. Nommons cette surface *surface centrale*. Cette surface est importante en ce sens qu'on peut considérer tous les rayons du système comme issus de ses points. Si l'on mesure les abscisses des points des rayons à partir de la surface centrale, on aura

$$r_1 = -r_2, \quad \rho_1 = -\rho_2, \quad g\mathfrak{E} - (f+f')\mathfrak{F} + e\mathfrak{G} = 0$$

Ces équations permettent de faire des simplifications importantes.

On obtient les équations de la surface centrale au moyen de l'expression de l'abscisse des autres

$$m = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{g\mathfrak{E} - (f+f')\mathfrak{F} + e\mathfrak{G}}{2\Delta^2};$$

on a

$$x' = x + m\xi, \quad y' = y + m\eta, \quad z' = z + m\zeta.$$

Toutes ces surfaces, les surfaces des points limites, les surfaces focales et la surface centrale, qui sont intimement liées au système de rayons, peuvent dans certains cas particuliers se réduire à des courbes ou à des points. Certaines de ces surfaces peuvent aussi s'éloigner à l'infini, ou se réunir entre elles de manière à s'appliquer l'une sur l'autre. Le système des normales à une surface pour lequel les surfaces des points limites et les surfaces focales deviennent identiques peut être considéré comme appartenant à ces systèmes particuliers qui sont, pour ainsi dire, des systèmes limites. Le système de rayons pour lesquels $\Delta = 0$ et par suite $A = 0$, $B = 0$, $E = 0$ et qui doit être exclu de l'étude générale, parce que les valeurs de ξ, η, ζ sont indéterminées, mérite une mention spéciale. Pour ces systèmes particuliers, les surfaces des points limites et la surface centrale passent à l'infini, et, des deux surfaces focales, l'une passe à l'infini, tandis que l'autre reste déterminée et à distance finie. Des deux séries de surfaces développables qui renferment tous les rayons d'un tel système, l'une, celle dont les arêtes de rebroussement sont à l'infini, ne renferme que des surfaces cylindriques. Un pareil système peut être défini géométriquement de la manière suivante : le système de toutes les tangentes à une surface qui sont parallèles aux tangentes à une courbe donnée.

(*La suite prochainement.*)