NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

E. PROUHET

Note sur les courbes rapportées à des coordonnées polaires

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 344-348

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__344_0>

NOTE SUR LES COURBES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES POLAIRES ;

PAR M. E. PROUHET.

Quand une courbe du second degré est rapportée à des coordonnées polaires, son équation est généralement du second degré par rapport au rayon vecteur ρ. Mais si l'on prend un foyer pour pôle, l'équation se décompose en deux autres du premier degré, dont chacune représente la courbe tout entière.

Ce fait remarquable tient à un théorème général que nous allons démontrer.

Soit

$$f(x,y)=0 \qquad (1)$$

l'équation d'une courbe rapportée à des coordonnées rectilignes et rectangulaires. Supposons que la fonction $f(x,y)$ soit entière et rationnelle et qu'elle ne puisse se décomposer en facteurs rationnels en x et y. Si l'on prend l'origine pour pôle et l'axe des x pour axe polaire, la même courbe sera encore représentée par l'équation

$$f(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)=0. \qquad (2)$$

Admettons que le premier membre de cette équation puisse se décomposer en deux facteurs rationnels, en sorte que l'on ait

$$f(\rho\cos\omega,\rho\sin\omega)=\varphi(\rho,\omega)\,\psi(\rho,\omega).$$

La fonction $\varphi(\rho,\omega)$ pourra se mettre sous la forme

$$M\rho+N\cos\omega+P\sin\omega+Q,$$

M, N, P, Q étant des fonctions de ρ^2, $\sin^2\omega$, $\cos^2\omega$, $\rho\sin\omega$, $\rho\cos\omega$, ou de quelques-unes de ces quantités. C'est ce dont on s'assure facilement en remarquant qu'un terme de $\varphi(\rho,\omega)$ est de la forme

$$A\rho^m \cos^n\omega \sin^p\omega,$$

et en faisant toutes les hypothèses possibles sur les exposants m, n, p suivant que chacun de ces exposants sera pair ou impair. En outre, on verra par cet examen que M, N, P, Q sont des fonctions entières ou des fonctions contenant ρ^2 seulement en dénominateur.

Cela posé, on peut écrire

$$\varphi(\rho,\omega) = M\rho + N\cos\omega + P\sin\omega + Q$$
$$= \frac{M\rho^2 + N\rho\cos\omega + P\rho\sin\omega}{\rho} + Q,$$

ou bien

$$(3) \qquad \varphi(\rho,\omega) = \frac{R}{\rho} + Q,$$

R étant une fonction de ρ^2, $\cos^2\omega$, etc., ou simplement de $\rho\cos\omega$, $\rho\sin\omega$, car

$$\rho^2 = (\rho\cos\omega)^2 + (\rho\sin\omega)^2, \quad \cos^2\omega = \frac{(\rho\cos\omega)^2}{\rho^2}, \ldots$$

On aura de même

$$(4) \qquad \psi(\rho,\omega) = \frac{R'}{\rho} + Q'$$

et par conséquent

$$f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = \left(\frac{R}{\rho} + Q\right)\left(\frac{R'}{\rho} + Q'\right).$$

Le second membre développé donne

$$\frac{RR'}{\rho^2} + \frac{RQ' + QR'}{\rho} + QQ'$$

et pour que cette expression soit une fonction de $\rho\cos\omega$ et de $\rho\sin\omega$, comme le premier membre, il faut évidemment que l'on ait

$$RQ' + QR' = o$$

d'où

$$\frac{Q'}{Q} = -\frac{R'}{R} = \lambda,$$

d'où résulte

$$(5)\qquad f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = \lambda\left(\frac{R}{\rho} + Q\right)\left(-\frac{R}{\rho} + Q\right).$$

λ ne peut être qu'une constante, ou une constante multipliée par une puissance de ρ^2 : car il en était autrement, comme λ est une fonction de $\rho\cos\omega$ et de $\rho\sin\omega$, ainsi que le produit des derniers facteurs du second membre, il en résulterait que $f(x, y)$ pourrait se décomposer en deux facteurs rationnels, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Maintenant l'équation $f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega) = o$ se réduit aux deux suivantes

$$(6)\qquad \frac{R}{\rho} + Q = o,$$

$$(7)\qquad \frac{R}{\rho} - Q = o,$$

qui représentent la même courbe, car R et Q ne changeant pas quand on change ρ en $-\rho$ et ω en $\omega + \pi$, il arrivera que si les coordonnées ρ, ω d'un point M satisfont à l'équation (6), les coordonnées $-\rho, \omega + \pi$, qui conviennent au même point M, satisferont à l'équation (7). Par conséquent, chacune de ces équations représente toute la courbe si l'on admet pour ρ des valeurs négatives et n'en représente, en général, qu'une partie si l'on répète les valeurs négatives du rayon vecteur.

Nous disons, *en général*, parce que si l'équation (6) ne donnait pour ρ que des valeurs positives, l'équation (7) ne donnerait pour ρ que des valeurs négatives. Alors l'équation (6) représenterait toute la courbe. Exemple :

$$(\rho + \sin\omega - 1)(\rho + \sin\omega + 1) = 0.$$

Dans ce qui précède, nous avons supposé R, R', Q, Q' différents de zéro. Si quelques-unes de ces fonctions étaient nulles, il y aurait lieu de faire une discussion qui ne présenterait aucune difficulté. Disons seulement qu'un des cas de cette discussion donnerait une exception au théorème général, quand le pôle est pris sur la courbe même. Dans ce cas l'un des facteurs de $f(\rho\cos\omega, \rho\sin\omega)$ est une puissance de ρ et ce facteur, égalé à zéro, ne représente que le pôle.

P.-S. M. Terquem m'ayant demandé si le résultat trouvé dans cette Note pouvait s'étendre aux surfaces, j'ai reconnu qu'on pouvait répondre affirmativement à cette question.

En effet, soit

$$f(x, y, z) = 0$$

une équation algébrique, entière et irréductible. Posons

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = \rho\sin\varphi\sin\theta,$$

ce qui revient à rapporter la surface représentée par l'équation précédente à un système de coordonnées polaires. Par une marche analogue à celle que nous avons suivie, on trouvera que si la fonction transformée peut se décomposer en deux facteurs rationnels $f_1(\rho, \varphi, \theta)$, $f_2(\rho, \varphi, \theta)$, on aura nécessairement

$$f_1(\rho, \varphi, \theta) = \frac{R}{\rho} + Q, \quad f_2(\rho, \varphi, \theta) = -\frac{R}{\rho} + Q,$$

R et Q étant des fonctions de $\rho\cos\varphi$, $\rho\sin\varphi\cos\theta$, etc., ou de x, y, z. Exemple :

$$x^2 + y^2 + z^2 - (ex + fy + gz + h)^2 = 0.$$

En coordonnées polaires, cette équation se décompose en deux, dont chacune représente toute la surface.

Plus généralement, si une fonction d'un nombre quelconque de variables se décompose en facteurs rationnels à l'aide de la transformation

$$\begin{aligned}
x &= \rho\cos\varphi,\\
y &= \rho\sin\varphi\cos\theta,\\
z &= \rho\sin\varphi\sin\theta\cos\psi,\\
u &= \rho\sin\varphi\sin\theta\sin\psi\cos\xi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

elle sera le produit de $\frac{R}{\rho} + Q$ par $-\frac{R}{\rho} + Q$, R et Q étant des fonctions de x, y, z, u.