NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

CREMONA

Sur la question 317

Nouvelles annales de mathématiques 1re série, tome 20 (1861), p. 342-343

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__342_0>

SUR LA QUESTION 317

(voir t. XV, p. 52);

PAR M. CREMONA,
Professeur à Bologne.

Voici l'énoncé de la question :

On donne sur un plan, 1° une conique S; 2° cinq points m, a, b, c, o, dont l'un, m, est pris sur le périmètre de la conique. On propose de mener par le point o une transversale qui coupe la conique en deux points (réels ou imaginaires) p, q situés avec les quatre m, a, b, c sur une même conique. Démontrer qu'il existe, en général, deux solutions. (DE JONQUIÈRES.)

Je conçois le faisceau F(K) des coniques circonscrites au tétragone $mabc$; toute conique K de ce faisceau rencontrera S en trois points p, q, r (outre m). Quelle courbe est enveloppée par les côtés des triangles analogues à pqr? Pour répondre à cette question, j'observe que chaque point p de la conique S donne lieu à une seule conique du faisceau F(K), passant par p; donc ce point détermine un seul triangle analogue à pqr; c'est-à-dire on peut mener par tout point de S deux tangentes seulement à la courbe enveloppe cherchée. Donc cette courbe est de la seconde classe, ou bien une conique C.

La question proposée est résolue par les tangentes de C, menées par le point o.

Parmi les coniques du faisceau F(K) il y en a trois, dont chacune est le système de deux droites; ce sont les couples de côtés opposés du tétragone $mabc$, c'est-à-dire bc, am; ca, bm; ab, cm. Il s'ensuit que bc, ca, ab sont des tangentes de l'enveloppe C. Ainsi nous avons ce théorème :

Toute conique circonscrite à un triangle donné et passant par un point fixe d'une conique donnée coupe celle-ci en trois autres points qui sont les sommets d'un triangle circonscrit à une conique fixe, inscrite au triangle donné.

Soient S et C deux coniques telles, qu'un triangle pqr inscrit dans S soit circonscrit à C. On sait, d'après un théorème très-connu de M. Poncelet, que tout point de S est le sommet d'un triangle inscrit dans S et circonscrit à C. Soit abc un triangle circonscrit à C, mais dont les sommets n'appartiennent pas à S. On sait encore que, si deux triangles sont circonscrits à une même conique, ils sont inscrits dans une autre conique; donc les points p, q, r, a, b, c appartiennent à une conique K. Cette conique K rencontrera S en un point m (outre p, q, r). Maintenant, en vertu du théorème démontré ci-devant, toute conique circonscrite au tétragone $abcm$ détermine un triangle inscrit dans S et circonscrit à une conique fixe C', inscrite en abc. Mais, parmi les coniques circonscrites au tétragone $abcm$, il y a K; donc C' coïncide avec C, et par conséquent :

On donne sur un plan : 1° deux coniques S et C telles, que tout point de S est le sommet d'un triangle pqr inscrit en S et circonscrit à C; 2° un triangle fixe abc circonscrit à C, mais dont les sommets n'appartiennent pas à S. Un triangle quelconque pqr et le triangle abc sont inscrits dans une même conique K.

Toutes les coniques K, circonscrites à abc et aux divers triangles pqr passent par un même point fixe de S.