NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES

PAINVIN

# Application de la nouvelle analyse aux surfaces du second ordre (fin)

*Nouvelles annales de mathématiques 1re série*, tome 20 (1861), p. 321-341

<http://www.numdam.org/item?id=NAM_1861_1_20__321_0>

# APPLICATION DE LA NOUVELLE ANALYSE AUX SURFACES DU SECOND ORDRE (FIN)

(voir t. XX, p. 243);

PAR M. PAINVIN,
Docteur ès Sciences.

## CHAPITRE V.

### APPLICATIONS.

### § I. — *Polaires réciproques de deux surfaces du second degré qui se coupent suivant deux courbes planes.*

**104.** La première surface ayant pour équation

$$(1)\qquad S = \mathbf{S}\, a_{rs}\, x_r\, x_s = 0, \quad (a_{rs} = a_{sr})$$

l'équation de la seconde pourra s'écrire sous la forme

$$(2)\qquad S' = S + 2\,MN = 0;$$

M et N représentant deux plans connus,

$$(3)\qquad \begin{cases} M = m_1\, x_1 + m_2\, x_2 + m_3\, x_3 + m_4\, x_4 = 0, \\ N = n_1\, x_1 + n_2\, x_2 + n_3\, x_3 + n_4\, x_4 = 0. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second degré passant par les courbes d'intersection des deux surfaces S' et S sera

$$(4)\qquad S'' = S + 2\lambda\, MN = 0,$$

$\lambda$ désignant une constante indéterminée.

**105.** Ceci posé, cherchons les polaires réciproques des surfaces S et S', et du système des surfaces S''; nous désignerons ces réciproques respectivement par $\Sigma$, $\Sigma'$, $\Sigma''$.

Si l'on représente par $\Delta$ le discriminant de la surface S, et par $\alpha_{rs}$ les dérivées partielles de $\Delta$, de sorte que

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \quad \alpha_{rs} = \alpha_{sr} = \frac{d\Delta}{da_{rs}} \tag{5}$$

nous aurons pour la réciproque de S (n° 95) :

$$\Sigma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{S}\,\alpha_{rs}\,x_r\,x_s. \tag{6}$$

Pour obtenir la réciproque de S′, nous chercherons d'abord la réciproque de S″, et dans le résultat nous ferons $\lambda = 1$. Or la réciproque de S″ est (95) :

$$\Sigma'' = \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda(m_1n_1+m_1n_1) & a_{12}+\lambda(m_1n_2+m_2n_1) & a_{13}+\lambda(m_1n_3+m_3n_1) & a_{14}+\lambda(m_1n_4+m_4n_1) & x_1 \\ a_{21}+\lambda(m_2n_1+m_1n_2) & a_{22}+\lambda(m_2n_2+m_2n_2) & a_{23}+\lambda(m_2n_3+m_3n_2) & a_{24}+\lambda(m_2n_4+m_4n_2) & x_2 \\ a_{31}+\lambda(m_3n_1+m_1n_3) & a_{32}+\lambda(m_3n_2+m_2n_3) & a_{33}+\lambda(m_3n_3+m_3n_3) & a_{34}+\lambda(m_3n_4+m_4x_3) & x_3 \\ a_{41}+\lambda(m_4n_1+m_1n_4) & a_{42}+\lambda(m_4n_2+m_2n_4) & a_{43}+\lambda(m_4n_3+m_3n_4) & a_{44}+\lambda(m_4n_4+m_4n_4) & x_4 \\ x_1+0 & x_2+0 & x_3+0 & x_4+0 & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

**106.** Introduisons d'abord les notations suivantes :

$$
(8)\quad \left\{
\begin{aligned}
\alpha &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} \\
\beta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\
\gamma &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\
\mathrm{D} &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

*N. B.* $\alpha = 0$, $\beta = 0$, sont les conditions pour que les plans M ou N soient tangents à la surface $S = 0$; $D = 0$ est la condition pour que la droite intersection de ces deux plans soit aussi tangente à la surface S.

$$
(9)\quad \left\{
\begin{aligned}
P &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \frac{d\gamma}{dn_1} + x_2 \frac{d\gamma}{dn_2} + x_3 \frac{d\gamma}{dn_3} + x_4 \frac{d\gamma}{dn_4}, \\
Q &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & x_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & x_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & x_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & x_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} = x_1 \frac{d\gamma}{dm_1} + x_2 \frac{d\gamma}{dm_2} + x_3 \frac{d\gamma}{dm_3} + x_4 \frac{d\gamma}{dm_4},
\end{aligned}
\right.
$$

P et Q représentent des plans.

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
A &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & x_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & x_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0
\end{vmatrix}. \\
G &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & x_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & x_4 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0
\end{vmatrix}. \\
E &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0
\end{vmatrix} \\
H &= \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 & x_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 & x_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 & x_3 \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 & x_4 \\
m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 & 0 \\
n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 & 0 \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 & 0 & 0
\end{vmatrix}
\end{aligned}
\right.
$$

En appliquant la formule générale bien connue

$$\mathrm{P}\frac{d^2\mathrm{P}}{da_{rs}\,da_{r_1s_1}} = \frac{d\mathrm{P}}{da_{rs}}\,\frac{d\mathrm{P}}{da_{r_1s_1}} - \frac{d\mathrm{P}}{da_{rs_1}}\,\frac{d\mathrm{P}}{da_{r_1s}}$$

on trouve, entre ces déterminants, les relations suivantes qui nous seront d'une grande utilité :

$$(11)\qquad \left\{\begin{array}{l} \Delta\,\mathrm{D} = \alpha\beta - \gamma^2; \\ \Delta.\mathrm{E} = \alpha\mathrm{Q} - \gamma\mathrm{P}; \\ \Delta.\mathrm{A} = \alpha\Sigma - \mathrm{P}^2; \\ \Delta.\mathrm{G} = \gamma\Sigma - \mathrm{PQ}; \\ \alpha.\mathrm{H} = \mathrm{DA} - \mathrm{E}^2. \end{array}\right.$$

On conclut de ces dernières égalités

$$(12)\qquad \Delta^2.\mathrm{H} = \Delta\mathrm{D}.\Sigma - (\beta\mathrm{P}^2 - 2\gamma\mathrm{PQ} + \alpha\mathrm{Q}^2).$$

Les relations (11) nous conduisent à plusieurs conséquences géométriques :

1°. Le plan E passe par l'intersection des plans P et Q.

2°. La surface A est circonscrite à la réciproque $\Sigma$ suivant la courbe déterminée par le plan P.

3°. La surface B, obtenue en changeant dans A les $m$ en $n$, est circonscrite à la réciproque $\Sigma$ suivant la courbe déterminée par le plan Q.

4°. La surface G coupe la réciproque $\Sigma$ suivant les deux courbes planes P et Q;

5°. La surface H est circonscrite à la surface A suivant la courbe déterminée par le plan E.

Etc., etc.

107. Occupons-nous maintenant de la recherche de

la réciproque $\Sigma''$. Si l'on *développe par colonnes* le déterminant (7) on obtient immédiatement

$$\Sigma'' = \Sigma - 2G\lambda - H\lambda^2. \tag{13}$$

108. En faisant $\lambda = 1$, et en ayant égard aux relations (11) et (12), on trouvera pour la réciproque $\Sigma'$ de $S'$

$$\Delta^2 . \Sigma' = \delta^2 \Sigma + [\beta P^2 + 2(\Delta - \gamma) PQ + \alpha Q^2], \tag{14}$$

après avoir posé

$$\delta^2 = (\Delta - \gamma)^2 - \alpha\beta. \tag{15}$$

Enfin, si nous décomposons la parenthèse en facteurs du premier degré, et que nous posions

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta P + (\Delta - \gamma + \delta) Q], \\ \mathfrak{N} &= \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta P + (\Delta - \gamma - \delta) Q], \end{aligned}\right. \tag{16}$$

nous obtiendrons définitivement pour la réciproque de $S'$

$$\frac{\Delta^2}{\delta^2}\Sigma' = \Sigma + 2\mathfrak{M}.\mathfrak{N} = 0. \tag{17}$$

Si l'on se rappelle que la réciproque de $S$ est

$$\Sigma = 0, \tag{18}$$

nous conclurons, à l'inspection de ces deux équations, le théorème suivant :

*Lorsque deux surfaces du second degré se coupent suivant deux courbes planes, leurs polaires réciproques se coupent aussi suivant deux courbes planes.*

Et comme cas particulier : *Lorsque deux surfaces du second degré sont circonscrites l'une à l'autre, il en est de même de leurs polaires réciproques.*

## § II. — *Équation des cônes circonscrits à deux surfaces du second degré.*

**109.** Imaginons les cônes circonscrits aux deux surfaces du second degré S et S', puis cherchons le *système réciproque*. $\Sigma$ et $\Sigma'$ seront, par exemple, les réciproques de S et S'. Mais, chaque plan tangent *commun* aux deux surfaces S et S' *correspondra* à un point *commun* aux deux réciproques $\Sigma$ et $\Sigma'$; et, puisque les plans tangents à un même cône passent par le même point, les points correspondants seront dans un même plan; donc les deux surfaces $\Sigma$ et $\Sigma'$ se couperont suivant deux courbes planes; par suite, les réciproques de $\Sigma$ et $\Sigma'$, c'est-à-dire S et S', se couperont aussi suivant deux courbes planes.

Ainsi, *deux surfaces du second degré ne peuvent avoir des cônes tangents communs qu'à la condition de se couper suivant des courbes planes.*

**110.** Ceci étant admis, considérons les deux surfaces

$$(1)\qquad \mathrm{T}=\left\{\begin{matrix} \alpha_{11}x_1^2+\alpha_{22}x_2^2+\alpha_{33}x_3^2+\alpha_{44}x_4^2+2\alpha_{12}x_1x_2\\ +2\alpha_{13}x_1x_3+2\alpha_{14}x_1x_4+2\alpha_{23}x_2x_3\\ +2\alpha_{24}x_2x_4+2\alpha_{34}x_3x_4\end{matrix}\right\}=0,$$

$$(2)\qquad \mathrm{T}'=\mathrm{T}-2\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N}=0$$

qui se coupent suivant deux courbes planes.

Les $\Delta$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\alpha_{rs}$, ont les significations déterminées par les relations (5), (8), (15) du paragraphe précédent; les plans $\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ ont pour équations

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{M}&=\mathrm{M}_1x_1+\mathrm{M}_2x_2+\mathrm{M}_3x_3+\mathrm{M}_4x_4,\\ \mathfrak{N}&=\mathrm{N}_1x_1+\mathrm{N}_2x_2+\mathrm{N}_3x_3+\mathrm{N}_4x_4;\end{aligned}\right.$$

et les $M_r$, $N_r$ sont définis comme il suit

$$(4)\qquad \begin{cases} M_r = \dfrac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}\left[\beta\dfrac{d\gamma}{dn_r} + (\Delta - \gamma + \delta)\dfrac{d\gamma}{dm_r}\right]; \\ N_r = \dfrac{1}{\delta\sqrt{2\beta}}\left[\beta\dfrac{d\gamma}{dn_r} + (\Delta - \gamma - \delta)\dfrac{d\gamma}{dm_r}\right]. \end{cases}$$

L'équation générale des surfaces du second degré, T″, passant par l'intersection des deux surfaces T et T′, sera

$$(5)\qquad T'' = T - 2\mu\,\mathfrak{M}\,\mathfrak{N} = 0.$$

**111.** Cherchons maintenant les polaires réciproques des surfaces T, T′, T″.

Si l'on désigne par $\Delta'$ le discriminant de la fonction T, de sorte que

$$(6)\qquad \begin{cases} \Delta' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}, \\ \alpha_{rs} = \dfrac{d\Delta}{da_{rs}}, \end{cases}$$

on aura, d'après les relations connues sur les *déterminants réciproques*,

$$(7)\qquad \Delta' = \Delta^3, \quad \Delta^2 a_{rs} = \frac{d\Delta'}{d\alpha_{rs}}.$$

Il nous sera facile d'avoir les réciproques des surfaces T, T′, T″; nous désignerons ces réciproques respectivement par $S_1$, $S'_1$, $S''_1$.

**112.** Nous constatons d'abord que la réciproque de la surface T, est

$$(8)\qquad S_1 = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & x_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & x_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & x_3 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & x_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \end{vmatrix} = -\Delta^2 S,$$

en posant

$$(9)\qquad S = \left\{ \begin{aligned} & a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2 a_{12} x_1 x_2 \\ & + 2 a_{13} x_1 x_3 + 2 a_{14} x_1 x_4 + 2 a_{23} x_2 x_3 \\ & + 2 a_{24} x_2 x_4 + 2 a_{34} x_3 x_4 \end{aligned} \right\}.$$

113. Pour obtenir la réciproque $S''_1$ de $T''$, il suffira de remplacer dans les formules (7), (8), (9), (10), (11) du paragraphe précédent les quantités

$$a_{rs},\quad m_r,\quad n_r,\quad \lambda,\quad \text{et}\ \Delta$$

respectivement par

$$\alpha_{rs},\quad M_r,\quad N_r,\quad -\mu,\quad \text{et}\ \Delta'.$$

J'indiquerai par les *mêmes* lettres *accentuées* $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $D'$, $P'$, $Q'$, $A'$, $E'$, $G'$, $H'$, les résultats de cette substitution.

Nous aurons ainsi

$$(10)\qquad S''_1 = S_1 + 2G'\mu - H'\mu^2$$

pour la réciproque de $T''$; et, en faisant $\mu = 1$,

$$(11)\qquad S'_1 = S_1 + 2G' - H'$$

pour la réciproque de $T'$.

114. Avant d'aller plus loin, il est nécessaire de déterminer les valeurs des quantités $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $P'$, $Q'$.

Je vais indiquer la marche du calcul pour une de ces quantités, $\alpha'$ par exemple. On a

$$\alpha' = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \mathrm{M}_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & a_{23} & \alpha_{24} & \mathrm{M}_2 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \mathrm{M}_3 \\ a_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \mathrm{M}_4 \\ \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 & \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\delta\sqrt{2\beta}} \left\{ \beta \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dfrac{d\gamma}{dn_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dfrac{d\gamma}{dn_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dfrac{d\gamma}{dn_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \dfrac{d\gamma}{dn_4} \\ \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 & \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_4 & 0 \end{vmatrix} + (\Delta - \gamma + \delta) \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} & \dfrac{d\gamma}{dm_1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} & \dfrac{d\gamma}{dm_2} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} & \dfrac{d\gamma}{dm_3} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} & \dfrac{d\gamma}{md_4} \\ \mathrm{M}_1 & \mathrm{M}_2 & \mathrm{M}_3 & \mathrm{M}_4 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

en ayant égard à la définition (4) des $\mathrm{M}_r$, $\mathrm{N}_r$.

Remarquons maintenant que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\gamma}{dn_r} &= -(m_1\alpha_{r1} + m_2\alpha_{r2} + m_3\alpha_{r3} + m_4\alpha_{r4}), \\ \frac{d\gamma}{dm_r} &= -(n_1\alpha_{r1} + n_2\alpha_{r2} + n_3\alpha_{r3} + n_4\alpha_{r4}). \end{aligned} \right.$$

Multiplions alors les quatre premières colonnes du déterminant, multiplicateur de $\beta$ dans la valeur de $\alpha'$, respectivement par $m_1$, $m_2$, $m_3$, $m_4$, et ajoutons à la cinquième; opérons de la même manière sur le multiplicateur de $(\Delta-\gamma+\delta)$, en multipliant par $n_1$, $n_2$, $n_3$, $n_4$; il viendra, eu égard aux relations qui précèdent,

$$\delta\sqrt{2\beta}\cdot\alpha'=\Delta'\left[\begin{array}{c}\beta(m_1\mathrm{M}_1+m_2\mathrm{M}_2+m_3\mathrm{M}_3+m_4\mathrm{M}_4)\\+(\Delta-\gamma+\delta)(n_1\mathrm{M}_1+n_2\mathrm{M}_2+n_3\mathrm{M}_3+n_4\mathrm{M}_4)\end{array}\right].$$

En faisant intervenir les valeurs (4) des $\mathrm{M}_r$, N, et, en se rappelant la signification des quantités $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, définies par les égalités (8), (9), (11) et (15) du paragraphe précédent, on trouve la première des relations suivantes (les autres s'obtiennent par des calculs tout à fait semblables) :

$$(12)\qquad\left\{\begin{aligned}\alpha'&=\frac{\Delta^4}{\delta^2}(\Delta-\gamma+\delta),\\ \beta'&=\frac{\Delta^4}{\delta^2}(\Delta-\gamma-\delta),\\ \gamma'&=\frac{\Delta^3}{\delta^2}[\gamma(\Delta-\gamma)+\alpha\beta];\end{aligned}\right.$$

$$(13)\qquad\left\{\begin{aligned}\mathrm{P}'&=\frac{\Delta^3}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta\mathrm{M}+(\Delta-\gamma+\delta)\mathrm{N}],\\ \mathrm{Q}'&=\frac{\Delta^3}{\delta\sqrt{2\beta}}[\beta\mathrm{M}+(\Delta-\gamma-\delta)\mathrm{N}].\end{aligned}\right.$$

Les quantités M et N ont, dans ces dernières relations, la signification établie par les équations (3) du § I.

115. Nous pouvons maintenant procéder à la détermination des réciproques $\mathrm{S}'_1$, $\mathrm{S}''_1$, de T′ et T″.

Nous avons, en effet (11),

$$\mathrm{S}_1=\mathrm{S}_1+2\,\mathrm{G}'-\mathrm{H}'.$$

D'un autre côté, nous avons entre $G'$, $H'$, ..., les relations suivantes *similaires* avec les relations (11) et (12) du précédent paragraphe :

$$(14)\quad \begin{cases} \Delta'.D' = \alpha'\beta' - \gamma'^2, \\ \Delta'.G' = \gamma' S_1 - P'Q', \\ \Delta'^2.H' = \Delta' D'.S_1 - (\beta' P'^2 - 2\gamma' P' Q' + \alpha' Q'^2). \end{cases}$$

En substituant à $G'$, $H'$ ces valeurs, nous conclurons

$$(15)\quad \Delta'^2.S'_1 = [(\Delta'+\gamma')^2 - \alpha'\beta']S_1 + [\beta'P'^2 - 2(\Delta'+\gamma')P'Q' + \alpha'Q'^2].$$

Enfin, si l'on a égard aux relations (7), (12) et (13), il vient définitivement

$$(16)\qquad \frac{\delta^2}{\Delta^4} S'_1 = -(S + 2MN).$$

**116.** Ainsi, en résumé, la réciproque $S_1$ de T (1) sera

$$(17)\qquad S_1 = -\Delta^2 S;$$

et la réciproque $S'_1$ de $T'$ (2) sera

$$(18)\qquad S'_1 = -\frac{\Delta^4}{\delta^2}\cdot S'.$$

Dans ces relations, S représente le premier membre de l'équation générale (9) d'une surface du second degré; et $S'$ est définie par l'égalité

$$(19)\qquad S' = S + 2MN.$$

**117.** Considérons actuellement le système des surfaces $S''_1$ (10), réciproques des surfaces $T''$, savoir :

$$(20)\qquad S''_1 = S_1 + 2G'\mu - H'\mu^2.$$

On obtiendra l'enveloppe de ces surfaces, en éliminant

$\mu$ entre $S''_1 = 0$ et $\frac{dS''_1}{d\mu} = 0$; on trouve ainsi

$$G'^2 + H'S_1 = 0.$$

En remplaçant H′ par sa valeur déduite de l'identité (11), et G′ par sa valeur déduite de la seconde des équations (14); puis ayant égard aux relations (15) du § I, (7), (12), (13), (17) et (18) du § II, on trouve enfin, après quelques réductions, pour l'équation de l'enveloppe des surfaces $S''_1$,

$$(21)\quad [2(\Delta - \gamma)S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma)MN + \alpha N^2]^2 = 4\delta^2 SS'.$$

**118.** La forme de l'équation (21) nous montre que l'enveloppe des surfaces $S''_1$ touche les deux surfaces S et S′; ce qui devait être.

Remarquons qu'en passant du système T, T′, T″, au système réciproque, les plans *correspondants* des points *communs* aux surfaces T et T′ seront tangents *communs* aux surfaces réciproques S, S′, $S''_1$; donc les réciproques S, S′, $S''_1$ seront tangentes à l'enveloppe de ces plans. Or les surfaces T et T′ se coupent suivant des courbes planes; par suite, les plans polaires, correspondant aux points de chaque courbe plane, passeront par un même point et formeront un cône. D'un autre côté, le système réciproque $S''_1$ est toujours tangent à la surface (21), et comme il est tangent aux cônes enveloppés par les plans polaires, il en résulte que l'*équation* (21) est l'équation *des cônes circonscrits aux deux surfaces* S *et* S′; car l'intersection de deux surfaces $S''_1$, infiniment voisines, lesquelles sont toujours tangentes à ces cônes, doit se trouver en même temps et sur les cônes et sur l'enveloppe.

**119.** Dégageant tous ces résultats de calcul, nous pourrons nous résumer ainsi :

*Si l'on a deux surfaces du second degré se coupant suivant des courbes planes,*

$$\text{(I)}\qquad \begin{cases} S = \mathbf{S}\, a_{rs} x_r x_s = 0, \\ S' = S + 2MN = 0, \end{cases}$$

où

$$\text{(II)}\qquad \begin{cases} M = m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4, \\ N = n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4, \end{cases}$$

*l'équation du couple des cônes circonscrits à ces deux surfaces sera*

$$\text{(III)}\qquad [2(\Delta - \gamma)S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma)MN + \alpha N^2]^2 = 4\delta^2 SS'.$$

*Dans cette dernière équation, $\Delta$ désigne le discriminant de la fonction $S$, et on a posé, en outre,*

$$\text{(IV)}\qquad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 \end{vmatrix} & \beta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & n_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} \\ \gamma = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 \end{vmatrix} & \delta^2 = (\Delta - \gamma)^2 - \alpha\beta. \end{array} \right.$$

120. La forme de l'équation (III) nous montre que les deux cônes sont effectivement tangents aux surfaces $S$ et $S'$; et nous voyons de plus que les *quatre* courbes de contact sont sur la surface du second degré

$$\text{(V)}\qquad \Phi = 2(\Delta - \gamma)S + \beta M^2 + 2(\Delta - \gamma)MN + \alpha N^2.$$

Cette surface $\Phi$ coupe aussi les deux surfaces $S$ et $S'$

suivant deux courbes planes,

$$\left.\begin{array}{l}\text{la surface S, suivant les plans}\\ \left\{\begin{array}{ll}\beta M+(\Delta-\gamma+\delta)N=0 & (1)\\ \beta M+(\Delta-\gamma-\delta)N=0 & (3)\end{array}\right.\\ \text{la surface S}', \text{ suivant les plans}\\ \left\{\begin{array}{ll}\beta M-(\Delta-\gamma-\delta)N=0 & (2)\\ \beta M-(\Delta-\gamma+\delta)N=0 & (4)\end{array}\right.\end{array}\right\}\text{plans I.}$$

Les quatre plans (1), (2), (3), (4), qui se coupent suivant la droite (M, N), forment un *faisceau harmonique*.

**121**. En remplaçant dans l'équation (III) S′ par sa valeur identique S + 2MN, on parvient aisément à la mettre sous la forme :

$$[2\alpha\beta S+\beta(\Delta-\gamma)M^2+2\alpha\beta MN+\alpha(\Delta-\gamma)N^2]^2=\delta^2(\beta M^2-\alpha N^2)^2,$$

et nous arrivons ainsi à séparer les équations des deux cônes.

*Les équations des deux cônes* C *et* C′ *circonscrits aux deux surfaces* S *et* S′ *seront donc*

$$(\text{VI})\quad\left\{\begin{array}{l}C=2\alpha\beta S+\beta(\Delta-\gamma+\delta)M^2+2\alpha\beta MN\\ \quad+\alpha(\Delta-\gamma-\delta)N^2=0,\\ C'=2\alpha\beta S+\beta(\Delta-\gamma-\delta)M^2+2\alpha\beta MN\\ \quad+\alpha(\Delta-\gamma+\delta)N^2=0.\end{array}\right.$$

On constate tout de suite que ces deux cônes se coupent eux-mêmes suivant deux courbes planes, dont les plans ont pour équations

$$(\text{VII})\quad\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\beta}M+\sqrt{\alpha}N=0,\\ \sqrt{\beta}M-\sqrt{\alpha}N=0.\end{array}\right.$$

Ces deux plans, conjointement avec les deux plans M et N, forment encore un *faisceau harmonique.*

122. Les équations (VI) des deux cônes peuvent s'écrire :

$$(\mathrm{VIII})\quad \begin{cases} C = 2\alpha\beta S + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma+\delta}[(\Delta-\gamma+\delta)M+\alpha N]^2, \\ C' = 2\alpha\beta S + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma-\delta}[(\Delta-\gamma-\delta)M+\alpha N]^2, \end{cases}$$

ou bien encore, en remplaçant S par $(S'-2MN)$,

$$(\mathrm{IX})\quad \begin{cases} C = 2\alpha\beta S' + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma+\delta}[(\Delta-\gamma+\delta)M-\alpha N]^2, \\ C' = 2\alpha\beta S' + \dfrac{\beta}{\Delta-\gamma-\delta}[(\Delta-\gamma-\delta)M-\alpha N]^2. \end{cases}$$

On vérifie alors que les cônes C et C′ sont tangents aux deux surfaces S et S′, et l'on voit en outre que

les plans de contact du cône C sont : $\begin{cases} \text{avec } S, & (\Delta-\gamma+\delta)M+\alpha N = 0, \\ \text{avec } S', & (\Delta-\gamma+\delta)M-\alpha N = 0; \end{cases}$

les plans de contact du cône C′ sont : $\begin{cases} \text{avec } S, & (\Delta-\gamma-\delta)M+\alpha N = 0, \\ \text{avec } S', & (\Delta-\gamma-\delta)M-\alpha N = 0. \end{cases}$

Remarquons que ces derniers plans, eu égard à la relation (IV), coïncident avec les plans I.

Nous avons ainsi ce théorème remarquable :

*La surface* $\Phi$ (V) *contient les quatre courbes de contact des cônes* C *et* C′ *avec les surfaces* S *et* S′; *et, de plus, ce sont les courbes suivant lesquelles elle coupe les deux surfaces* S *et* S′.

123. Enfin par la droite (M, N) passent les deux *fais-*

*ceaux harmoniques*,

| | |
|---|---|
| 1° des *plans* suivant lesquels se coupent les deux surfaces S et S′, et les deux cônes C et C′ : | $\left\{\begin{array}{c} M = o, \\ M\sqrt{\beta} - N\sqrt{\alpha} = o, \\ N = o, \\ M\sqrt{\beta} + N\sqrt{\alpha} = o; \end{array}\right.$ |
| II° des *plans* des courbes de contact des deux cônes, lesquelles sont aussi les intersections de surface Φ avec les surfaces S et S′ : | $\left\{\begin{array}{l} \beta M + (\Delta - \gamma + \delta) N = o, \\ \beta M - (\Delta - \gamma - \delta) N = o, \\ \beta M + (\Delta - \gamma - \delta) N = o, \\ \beta M - (\Delta - \gamma + \delta) N = o. \end{array}\right.$ |

**124.** La discussion et l'interprétation des cas particuliers où l'on aurait $\alpha = o$, ou $\beta = o$, etc., ne saurait présenter de difficultés ; je ne m'y arrêterai pas.

## § III. — *Équation générale des surfaces réglées circonscrites à deux surfaces du second degré.*

**125.** Considérons la surface du second degré

$$\varphi = \sum a_{rs} x_r x_s = o, \tag{1}$$

et la droite D,

$$\left\{\begin{array}{l} m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + m_4 x_4 = o, \\ n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + n_4 x_4 = o. \end{array}\right. \tag{2}$$

Pour que cette droite soit tangente à la surface $\varphi$, il faut et il suffit (chap. II, § I, n° 36) que

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & m_3 & n_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & m_4 & n_4 \\ m_1 & m_2 & m_3 & m_4 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & n_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Si l'on multiplie les quatre premières lignes de ce déterminant par $x_1, x_2, x_3, x_4$, et qu'on ajoute les trois premières à la quatrième, en ayant égard aux relations (2); puis qu'on opère de la même manière sur les quatre premières colonnes du déterminant ainsi obtenu, l'équation (3) sera transformée en la suivante :

$$(4)\qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dfrac{d\varphi}{dx_1} & m_1 & n_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dfrac{d\varphi}{dx_2} & m_2 & n_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dfrac{d\varphi}{dx_3} & m_3 & n_3 \\ \dfrac{d\varphi}{dx_1} & \dfrac{d\varphi}{dx_2} & \dfrac{d\varphi}{dx_3} & 2\varphi & 0 & 0 \\ m_1 & m_2 & m_3 & 0 & 0 & 0 \\ n_1 & n_2 & n_3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Or, si maintenant on pose

$$\begin{cases} m_3 n_2 - m_2 n_3 = \lambda_1, \\ m_1 n_3 - m_3 n_1 = \lambda_2, \\ m_2 n_1 - m_1 n_2 = \lambda_3, \end{cases}$$

puis

$$
(5) \qquad R = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dfrac{d\varphi}{dx_1} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dfrac{d\varphi}{dx_2} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dfrac{d\varphi}{dx_3} \\ \dfrac{d\varphi}{dx_1} & \dfrac{d\varphi}{dx_2} & \dfrac{d\varphi}{dx_3} & 4\varphi \end{vmatrix}
$$

et qu'on développe l'équation (4), on obtient définitivement

$$
(6) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 \dfrac{d^2 R}{da_{22} da_{33}} + \lambda_2^2 \dfrac{d^2 R}{da_{33} da_{11}} + \lambda_3^2 \dfrac{d^2 R}{da_{11} da_{22}} \\ - 2\lambda_1\lambda_2 \dfrac{d^2 R}{da_{12} da_{33}} - 2\lambda_1\lambda_3 \dfrac{d^2 R}{da_{13} da_{22}} - 2\lambda_2\lambda_3 \dfrac{d^2 R}{da_{23} da_{11}} \end{array} \right\} = 0.
$$

C'est l'équation que doivent vérifier les coordonnées d'un point quelconque de toute droite tangente à la surface $\varphi$.

**126.** Si nous imaginons une seconde surface

$$
(7) \qquad \psi = \sum b_{rs} x_r x_s = 0,
$$

et que la droite D soit aussi tangente à cette surface, les coordonnées d'un quelconque de ses points devront encore vérifier l'équation

$$
(8) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1^2 \dfrac{d^2 S}{db_{22} db_{33}} + \lambda_2^2 \dfrac{d^2 S}{db_{33} db_{11}} + \lambda_3^2 \dfrac{d^2 S}{db_{11} da_{22}} \\ - 2\lambda_1\lambda_2 \dfrac{d^2 S}{db_{12} db_{33}} - 2\lambda_1\lambda_3 \dfrac{d^2 S}{db_{13} db_{22}} - 2\lambda_2\lambda_3 \dfrac{d^2 S}{db_{23} db_{11}} \end{array} \right\} = 0.
$$

Dans cette dernière équation, on a représenté par S le déterminant

$$(9) \qquad S = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \frac{d\psi}{dx_1} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \frac{d\psi}{dx_2} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \frac{d\psi}{dx_2} \\ \frac{d\psi}{dx_1} & \frac{d\psi}{dx_2} & \frac{d\psi}{dx_3} & 4\psi \end{vmatrix}.$$

**127.** Si, entre les deux équations (6) et (8), on élimine $\lambda_1$, et qu'on désigne par la lettre $\lambda$ le rapport $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$, on aura, pour l'équation générale des surfaces réglées circonscrites aux deux surfaces $\varphi$ et $\psi$, une équation de la forme

$$T^2 = 4UV,$$

dans laquelle

$$\begin{cases} U = A\lambda + B, \\ T = A'\lambda^2 + 2B'\lambda + C', \\ V = A''\lambda^3 + B''\lambda^2 + C''\lambda + D'', \end{cases}$$

$\lambda$ représentant une constante indéterminée, et les lettres A, B, A', B', C', A'', B'', C'', D'' des fonctions homogènes du quatrième degré des coordonnées $x_1$, $x_2$, $x_3$, $x_4$ d'un point quelconque de la surface réglée.

Il serait facile, en adoptant la même marche, de former l'équation de la surface réglée circonscrite à trois surfaces du second degré.